REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i1.21904

EXPLORANDO AS SIMETRIAS ROTACIONAL E REFLEXIVA EM CURVAS USANDO CONGRUÊNCIA MODULAR

EXPLORING ROTATIONAL AND REFLECTIVE SYMMETRIES IN CURVES USING MODULAR CONGRUENCE

Manolo Rodriguez Heredia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Aquidauana, Mato Grosso do Sul, Brasil
manolo.r@ufms.br

Cecilia Orellana Castro
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Aquidauana, Mato Grosso do Sul, Brasil
cecilia.o@ufms.br

Adriana Wagner
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Aquidauana, Mato Grosso do Sul, Brasil
adriana.wagner@ufms.br

Comunicado por A. R. S. Santos

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar a simetria de curvas utilizando congruência modular apresentando uma nova perspectiva de simetria rotacional e reflexiva. A justificativa para este estudo está na possibilidade de parametrizar uma curva conhecendo apenas uma parte dela e estendendo essa parametrização para todo o domínio por meio de rotações. Além disso, demonstramos que é possível reconstruir toda a curva conhecendo apenas uma parte menor dela e usando reflexões em determinadas retas. A metodologia do trabalho envolve a utilização de ferramentas de geometria diferencial para analisar curvas paramétricas. Apresentamos condições teóricas que garantem a simetria reflexiva, bem como uma interação entre a amplitude da rotação e a velocidade angular em curvas simétricas rotacionais. Os resultados demonstram que curvas simétricas rotacionais, juntamente com suas derivadas e vetores normais, mantêm a simetria reflexiva, validando a abordagem proposta.

Palavras-chave: Curvas paramétricas, simetria, congruência modular.

Abstract

This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

This paper aims to explore the symmetry of curves using modular congruence, presenting a new perspective on rotational and reflective symmetry. The justification for this study lies in the possibility of parameterizing a curve by knowing only a part of it and extending this parameterization to the entire domain through rotations. Furthermore, we demonstrate that it is possible to reconstruct the entire curve by knowing only a smaller portion of it and using reflections across certain lines. The methodology involves the use of differential geometry tools to analyze parametric curves. We present theoretical conditions that guarantee reflective symmetry, as well as an interaction between the amplitude of rotation and the angular velocity in rotationally symmetric curves. The results show that rotationally symmetric curves, along with their derivatives and normal vectors, maintain reflective symmetry, validating the proposed approach.

Keywords: Parametric curves, symmetry, modular congruence.

1 Introdução

A simetria é um conceito matemático presente em várias áreas, como geometria, teoria dos números e física. Por exemplo, em fotônica, vórtices ópticos em guias de onda com simetria rotacional exibem propriedades únicas úteis para manipular a luz em escala nanométrica [9]. A importância da simetria vai além das aplicações físicas; ela também desempenha um papel nas ciências computacionais. Tratamentos computacionais de simetria e teoria dos grupos, particularmente em visão computacional e gráficos, têm mostrado resultados promissores nos últimos anos [8]. Em particular, [4] trabalha com simetria rotacional de ordem m, com m um inteiro positivo, e mostra que essas curvas simétricas rotacionais podem ser reinterpretadas como curvas simétricas reflexivas de ordem m.

O conceito de congruência modular desempenha um papel central nesta pesquisa. Consideramos curvas paramétricas onde as velocidades angulares de diferentes circunferências são congruentes módulo m. Além disso, usando ferramentas de geometria diferencial, investigamos curvas obtidas através de vetores normais, curvas paralelas e curvas formadas por pontos em segmentos que conectam potências de uma raiz primitiva de um número primo, distribuídos ao longo de uma circunferência unitária. Confirmamos que essas construções também mantêm a simetria rotacional. Finalmente, apresentamos figuras que ilustram as curvas obtidas com as abordagens propostas.

O artigo está estruturado da seguinte maneira, a Fundamentação Teórica é subdividida em duas subseções: Preliminares Geométricos, simetria rotacional e simetria espelhada. Em seguida, a seção de Resultados é composta por três subseções: propriedades diferenciais de curvas simétricas rotacionais, curvas simétricas rotacionais em módulo

primo e visualização de curvas epitrocondiais. Finalizamos, o artigo apresentando uma seção de Conclusões.

2 Fundamentação Teórica

Nesta seção, abordamos alguns conceitos de geometria diferencial como parametrização de curvas, a definição de curvas periódicas e regulares, vetores tangente e normal, a construção de curvas paralelas e a curvatura de curvas parametrizadas. Também, exploraremos as simetrias rotacional e simetria espelhada definidas em [5], para a análise proposta neste trabalho.

Inicialmente, vamos apresentar as seguintes notações: R_θ e Δ_θ, as quais nos servem para representar as matrizes

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

respectivamente. Observe que a matrix R_θ descreve uma reflexão em torno de uma reta r que passa pela origem com θ como coeficiente angular e a matriz Δ_θ, uma rotação anti-horária dada por um ângulo θ com centro na origem do sistema de coordenadas.

Podemos usar a notação dessas matrizes para verificar que $\Delta_{2\theta} R_0 = R_\theta$, onde R_0 é a reflexão em torno do eixo x. De fato,

$$\Delta_{2\theta} R_0 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_\theta \,. \tag{2.2}$$

Usando a notação matricial dada em (2.1), temos

$$R_{2\theta} R_\theta = \Delta_{2\theta} \,, \tag{2.3}$$

$$\Delta_{\theta_1} \Delta_{\theta_2} = \Delta_{\theta_1 + \theta_2} \,, \tag{2.4}$$

essas igualdades que são verificadas usando identidades trigonométricas. A identidade (2.3) estabelece um resultado conhecido em geometria que relaciona uma rotação com duas reflexões.

A seguir, introduzimos os números complexos e sua correspondência com $\mathbb{R}^2$, baseados na abordagem de [1], isto com o objetivo de simplificar a notação ao longo do texto quando for necessário. Definidos $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$ como o conjunto dos números complexos, que podem ser mapeados para o plano real $\mathbb{R}^2$. Este mapeamento é estabelecido ao selecionar um ponto de origem O e um raio r originando-se de O. O sistema de coordenadas cartesiano é configurado de modo que o eixo Ox se alinhe com

r, e o eixo Oy seja rotacionado no sentido anti-horário por $\pi/2$ radianos a partir de r. Dessa maneira, cada número complexo $z = x + iy$ corresponde ao ponto (x, y) em $\mathbb{R}^2$, com x sendo a parte real e y a parte imaginária. Aqui, $\Re(z) = x$ é a projeção no eixo Ox e $\Im(z) = y$ é a projeção no eixo Oy. Em [1], existem mais detalhes acerca das propriedades geométricas dos números complexos, por exemplo, temos a identidade: $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

A seguir, descrevemos a relação que existe entre as matrizes dadas em (2.1) e os números complexos. A matriz Δ_θ representa uma rotação em $\mathbb{R}^2$ e corresponde a multiplicar um número complexo $z = x + iy$ pela função exponencial complexa $\exp(i\theta)$. Assim, Δ_θ pode ser vista como a operação $z \mapsto \exp(i\theta)z$. Além disso, a matriz R_θ representa uma reflexão e pode ser entendida tomando o conjugado complexo de z, resultando em $\overline{z} = x - iy$, e depois rotacionando por 2θ. Portanto, R_θ corresponde à operação $z \mapsto \exp(i2\theta)\overline{z}$. Essas identificações nos permitem usar operações matriciais para realizar transformações de números complexos geometricamente no plano real.

2.1 Preliminares geométricos

Nesta subseção, fundamentamos nossa abordagem teórica nas referências de [1] e [3]. Uma curva parametrizada em $\mathbb{C}$ é uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{C}$, onde $t \mapsto x(t) + iy(t)$ e $I \subset \mathbb{R}$. Um exemplo clássico de curva parametrizada em $\mathbb{C}$ é a circunferência com centro na origem e raio r, dado por $\gamma(t) = r\exp(it)$ para $t \in [0, 2\pi]$. Neste caso, a função exponencial complexa $\exp(it)$ descreve a posição de um ponto ao longo da circunferência à medida que t varia de 0 a 2π.

Curvas periódicas são aquelas que repetem seu comportamento após um certo intervalo de tempo. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Dada uma curva parametrizada, diz-se que é periódica se existe um número real p tal que $\gamma(t) = \gamma(t+p)$. O menor valor positivo de p é chamado de período de γ.*

A periodicidade é uma propriedade que permite prever o comportamento da curva ao longo do tempo. Por exemplo, as funções seno e cosseno têm período 2π, e a circunferência dada por $\gamma(t) = \exp(iat)$ tem período $2\pi/a$.

Para analisar as propriedades intrínsecas das curvas, estas devem ser contínuas e diferenciáveis. Também, trabalhamos com curvas regulares, conceito definido a seguir.

Definição 2.2. *Dizemos que uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{C}$ é regular em $t_0 \in I$ se $\gamma'(t_0) \neq 0$ ou, equivalentemente, se $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$. A curva γ é regular em I se for regular para todo $t \in I$.*

Curvas regulares são importantes porque evitam pontos onde a derivada é zero, conhecidos como cúspides, que podem introduzir singularidades indesejadas na análise.

O vetor tangente a uma curva em um ponto específico fornece a direção do movimento ao longo da curva naquele ponto. Formalmente, para uma curva parametrizada $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, o vetor tangente em um ponto $P = \gamma(t_0)$ da curva é dado pela derivada de γ em t_0, isto é, $\gamma'(t_0)$.

Para uma análise mais detalhada, introduzimos os vetores tangente unitário e normal unitário. Estes vetores são normalizados para ter comprimento 1 e fornecem informações sobre a direção e a curvatura da curva, respectivamente.

Definição 2.3. *Se a curva parametrizada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é regular, o vetor tangente unitário e o vetor normal unitário são dados por*

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{e} \quad \vec{N}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Quando a curva γ está definida em $\mathbb{R}^2$, existe uma relação entre os vetores tangente e normal através de uma rotação de $\pi/2$ radianos: $\vec{N}(t) = \Delta_{\pi/2}\vec{T}(t)$.

Curvas paralelas são construídas a partir de uma curva original γ deslocando-se ao longo do vetor normal a uma distância fixa d. Formalmente, temos a definição abaixo.

Definição 2.4. *Dada uma curva regular $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com vetor normal $\vec{N}(t)$ e um número real d, a curva $\gamma_d(t) = \gamma(t) + d\vec{N}(t)$ é chamada de curva paralela a γ à distância d.*

A curvatura de uma curva parametrizada é uma medida de quão rapidamente a direção da curva está mudando em relação à distância percorrida ao longo da curva. A curvatura é definida da seguinte forma.

Definição 2.5. *A curvatura de γ em t é dada por*

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}, \tag{2.5}$$

onde $\vec{T}(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$.

Baseado em [6], a curvatura κ pode ser expressa em termos do determinante ao considerar a componente ortogonal de $\gamma''(t)$ em relação a $\gamma'(t)$, isto é,

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det \begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Esta expressão utiliza o determinante, que representa a área do paralelogramo formado por $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$, refletindo a componente ortogonal de $\gamma''(t)$ em relação a $\gamma'(t)$.

2.2 Simetria rotacional

Nesta subseção, estudamos a curva apresentada em [4] para entender a simetria rotacional, essa curva é construída quando imaginamos uma circunferência como uma roda, a fim de: *descrever a trajetória de uma partícula em uma roda montada em uma segunda roda, que por sua vez está montada em uma terceira roda, com cada roda girando a uma velocidade angular diferente.*

Para $M = 3$, esta curva é conhecida como a "curva misteriosa", descrita em [4]. Podemos generalizar essa construção de três rodas para M rodas, para tanto, considere m e k inteiros positivos fixos e a seguinte representação de γ,

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{M} r_j \exp(ia_j t)\,, \tag{2.7}$$

onde $t \in [0, 2\pi)$, M é um número inteiro maior que ou igual a 1. Para $j = 1, \cdots, M$, $r_j > 0$ são os raios e $a_j \in \mathbb{Z}$ são as velocidades angulares de cada roda, com a seguinte condição: $k \equiv a_j \mod m$.

Observamos que γ é uma curva periódica com periodo $p = 2\pi$. Também, a curva γ detém a seguinte propriedade: a cada $2\pi/m$ segundos de tempo transcorridos, ela rotaciona um ângulo de $2k\pi/m$ radianos, este fato é verificado com o seguinte teorema.

Teorema 2.6. *Se m, k e a_j são números inteiros tais que $k \equiv a_j \mod m$, para $j = 1, \ldots, M$, então para quaisquer r_j, a curva dada em (2.7) satisfaz a condição de simetria*

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m} + t\right) = \exp\left(ik\frac{2\pi}{m}\right)\gamma(t)\,, \tag{2.8}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Demonstração. Por hipótese, sabemos que $(a_j - k)/m \in \mathbb{Z}$, logo $\exp(i2\pi(a_j - k)/m) = 1$, para todo $j = 1, \ldots, M$. Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\frac{2\pi}{m} + t\right) &= \sum_{j=1}^{M} r_j \exp(ia_j t)\exp(i2\pi\frac{a_j}{m}) \\
&= \sum_{j=1}^{M} r_j \exp\left(ia_j t\right)\exp\left(i2\pi\frac{k}{m}\right)\exp\left(i2\pi\frac{a_j - k}{m}\right) \\
&= \exp\left(i2\pi\frac{k}{m}\right)\sum_{j=1}^{M} r_j \exp(ia_j t) = \exp\left(ik\frac{2\pi}{m}\right)\gamma(t)\,,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

como queríamos mostrar. □

Do Teorema 2.6, usando a representação matricial de uma rotação, podemos escrever:

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m}+t\right)=\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma(t)\,. \tag{2.10}$$

A partir de (2.10), observamos que por cada $2\pi/m$ segundos de tempo que se passam, a curva γ rotaciona $2\pi k/m$ radianos.

Usando o fato de que "k e m são coprimos se, e somente se, a classe de k módulo m gera todo o grupo aditivo $\mathbb{Z}_m$" e o Teorema 2.6, temos a seguinte definição apresentada em [5].

Definição 2.7. *Uma curva γ tem simetria rotacional de ordem m ou exibe m-dobraduras de rotação se existe um inteiro positivo k tal que $mdc(m,k)=1$ e*

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m}+t\right)=\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma(t).$$

Para compreender a Definição 2.7, podemos considerar o caso em que $m=2$ e $k=1$. Nesse caso, obtemos a seguinte igualdade

$$\gamma(\pi+t)=\Delta_{\pi}\gamma(t)\quad\text{ou}\quad\gamma(\pi+t)=-\gamma(t)\,. \tag{2.11}$$

Na Figura 1, apresentamos a curva γ dada por

$$\gamma(t)=\frac{1}{4}\exp(i3t)+\exp(-it)+\frac{1}{4}\exp(i7t)+\frac{1}{4}\exp(-i9t)\,, \tag{2.12}$$

como exemplo particular de (2.11).

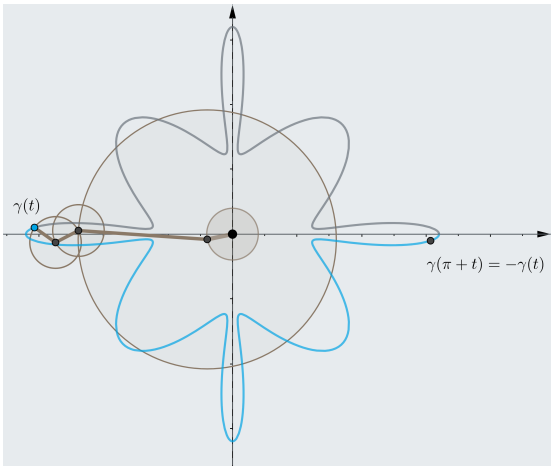


Figura 1: Curva simétrica rotacional de ordem $m=2$ com $M=4$ e $k=1$, dada em (2.12).

2.3 Simetria espelhada

Outro conceito apresentado em [5] é a *simetria espelhada* dada por

$$\gamma(-t) = \exp(2\theta i)\overline{\gamma(t)}\,. \tag{2.13}$$

Quando $\theta = 0$, temos

$$\gamma(-t) = \overline{\gamma(t)}. \tag{2.14}$$

As igualdades (2.13) e (2.14) podem ser escritas usando a notação matricial dada em (2.1) para obter

$$\gamma(-t) = \Delta_{2\theta} R_0 \gamma(t) = R_\theta \gamma(t) \tag{2.15}$$

$$\gamma(-t) = R_0 \gamma(t)\,. \tag{2.16}$$

Observe que a última igualdade em (2.15) é consequência de (2.2). Note que (2.15) e (2.16) representam a simetria espelhada em relação a uma reta inclinada com ângulo θ e em relação ao eixo x, respectivamente.

É relevante destacar que, embora a simetria espelhada em relação a uma reta inclinada com ângulo θ arbitrário, seja um conceito interessante, neste trabalho usaremos o caso em que $\theta = 0$. Isto é, curvas definidas conforme (2.7), com coeficientes $r_1, r_2, \ldots, r_M$ reais que satisfazem a simetria espelhada em relação ao eixo x.

3 Resultados

Nesta seção, são apresentados alguns resultados teóricos obtidos pelos autores e suas aplicações em representações visuais das curvas estudadas. Além disso, é realizada uma análise da parametrização de curvas que são determinadas pelas potências de $g \in \mathbb{Z}_p^*$ no círculo unitário, onde p é um número positivo.

Inicialmente, suponha que γ seja uma curva com simetria rotacional de ordem m de acordo com a Definição 2.7, com $t \in [0, 2\pi)$. Denote $\gamma|_{(0,2\pi/m)}$ a restrição de γ ao intervalo $(0, 2\pi/m)$. Verifica-se que basta considerar $\gamma|_{(0,2\pi/m)}$ para gerar a curva toda. De fato, para $t \in (0, 2\pi/m)$ usando as igualdades (2.8) e (2.4), temos que para $j = 1, 2, \ldots, m-1$ se satisfaz

$$\gamma\left(j\frac{2\pi}{m} + t\right) = \gamma\left(\frac{2\pi}{m} + \left((j-1)\frac{2\pi}{m} + t\right)\right) \tag{3.1}$$

$$= \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma\left(\frac{2\pi}{m} + \left((j-2)\frac{2\pi}{m} + t\right)\right) \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

$$=\Delta_{2k\frac{2\pi}{m}}\gamma\left(\frac{2\pi}{m}+\left((j-3)\frac{2\pi}{m}+t\right)\right) \tag{3.4}$$

$$\vdots \tag{3.5}$$

$$=\Delta_{(j-1)k\frac{2\pi}{m}}\gamma\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) \tag{3.6}$$

$$=\Delta_{jk\frac{2\pi}{m}}\gamma\left(t\right)\,. \tag{3.7}$$

Assim, dado $s\in(0,2\pi)$, define-se $t=s-j\frac{2\pi}{m}$, onde j satisfaz $j\frac{2\pi}{m}<s<(j+1)\frac{2\pi}{m}$, e usando (3.1) tem-se que

$$\gamma(s)=\gamma\left(j\frac{2\pi}{m}+t\right)=\Delta_{jk\frac{2\pi}{m}}\gamma(t)=\Delta_{jk\frac{2\pi}{m}}\,\gamma|_{(0,\frac{2\pi}{m})}\left(t\right). \tag{3.8}$$

Observe que a equação (3.8) permite calcular a imagem de γ para qualquer $s\in[0,2\pi)$, determinando $j\in\{1,\ldots,m-1\}$ e rotacionando $\gamma|_{(0,\frac{2\pi}{m})}(t)$ um ângulo de $jk\frac{2\pi}{m}$ radianos.

Na Figura 2, temos a curva simétrica rotacional de ordem $m=5$ dada por

$$\gamma(t)=\frac{15}{8}\exp(it)+\frac{7}{8}\exp(i7t)\,. \tag{3.9}$$

Como consequência de (3.8), devemos considerar um ângulo $2\pi/5$ e rotacionar 4 vezes a $\gamma|_{(0,2\pi/5)}$ para obter a curva γ. Além disso, observe que a restrição de $\gamma|_{(0,2\pi/5)}$ é igual a união das curvas $\gamma_1=\gamma|_{(0,\pi/5)}$ e $\gamma_2=\gamma|_{(\pi/5,\ 2\pi/5)}$ apresentadas na Figura 2.

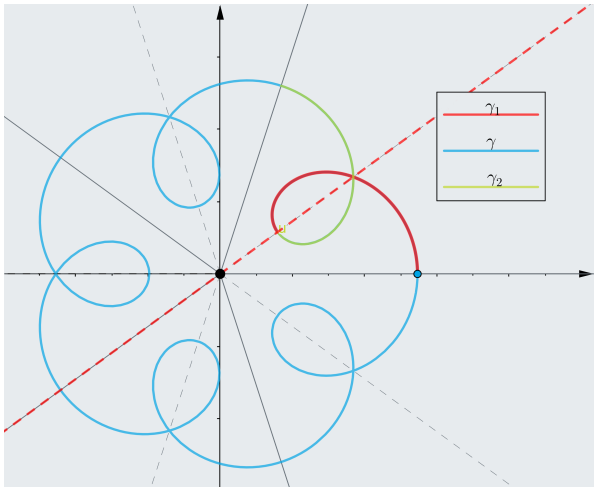


Figura 2: Curva simétrica rotacional de ordem 5 dada em (3.9) com $M=2$ e $k=1$.

Dado que γ_2 é a reflexão de γ_1 em relação a reta com inclinacão $\pi/5$, para obter a parte restante da curva γ, poderiamos fazer a reflexão da curva γ_2 em tormo a reta com inclinação $2\pi/5$ para obter γ_3 e assim sucesivamente, até γ_{10} e completar a curva γ.

A seguir, baseados na ideia usada em (3.8), determinamos as condições para que uma curva simétrica rotacional de ordem m seja gerada pela restrição da curva ao intervalo $(0, \pi/m)$. Para tanto, provamos o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Se m, k, a_j são números inteiros tais que $k \equiv a_j \mod m$ para $j = 1, \ldots, M$ e $mdc(m, k) = 1$, então a curva dada em (2.7) satisfaz*

(i) Para todo $t \in [0, 2\pi)$.

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m} - t\right) = R_{k\frac{\pi}{m}}\gamma(t)\,, \tag{3.10}$$

(ii) Para todo $t \in [0, \pi/m)$ e $j = 1, \ldots, 2m-1$.

$$\gamma\left(j\frac{\pi}{m} + t\right) = R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma\left(j\frac{\pi}{m} - t\right)\,. \tag{3.11}$$

Demonstração.

(i) Usamos a ideia na demonstração do Teorema 2.6 para $2\pi/m - t$ e obtemos

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m} - t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma(-t). \tag{3.12}$$

De (2.16), $R_0\gamma(t) = \gamma(-t)$, onde R_0 é a matriz de reflexão com ângulo igual a zero. A partir de (2.2) temos $\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}R_0 = R_{k\frac{\pi}{m}}$, usando essas duas últimas igualdades e (3.12) tem-se

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{m} - t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}R_0\gamma(t) = R_{k\frac{\pi}{m}}\gamma(t), \tag{3.13}$$

para cada $t \in (0, 2\pi)$.

(ii) Seja $s \in [0, \pi/m)$ e considere t tal que $t + s = \pi/m$. Assim, usando (3.10) podemos concluir que

$$\gamma\left(\frac{\pi}{m} + t\right) = \gamma\left(\frac{2\pi}{m} - s\right) = R_{k\frac{\pi}{m}}\gamma(s) = R_{k\frac{\pi}{m}}\gamma\left(\frac{\pi}{m} - t\right)\,, \tag{3.14}$$

para $t \in (0, \pi/m)$, isto é, a curva γ é simétrica reflexiva em relação à reta $y = \tan(k\pi/m)x$.

Por outro lado, usando (2.3), (3.13) e o Teorema 2.6 obtem-se

$$\gamma\left(2\frac{\pi}{m}+t\right)=\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma(t)=R_{k\frac{2\pi}{m}}R_{k\frac{\pi}{m}}\gamma(t)=R_{2k\frac{\pi}{m}}\gamma\left(2\frac{\pi}{m}-t\right), \tag{3.15}$$

Isto é, podemos estabelecer que a curva γ é simétrica em relação à reta definida por $y=\tan\left(2k\frac{\pi}{m}\right)x$. Observe que (3.11) está provada para $j=1,2$.

A seguir, vamos verificar

$$\gamma\left(j\frac{\pi}{m}+t\right)=R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma\left(j\frac{\pi}{m}-t\right), \tag{3.16}$$

para $j=3\ldots,2m-1$. Para tanto, usando (3.1), (2.3) e (2.16), obtemos

$$\gamma\left(j\frac{2\pi}{m}-s\right)=\Delta_{jk\frac{2\pi}{m}}\gamma\left(-s\right)=\Delta_{jk\frac{2\pi}{m}}R_0\gamma\left(s\right)=R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma\left(s\right). \tag{3.17}$$

De (3.17), para $t\in(0,\pi/m)$, escolhemos s tal que $t+s=j\pi/m$. Com isso temos que

$$\gamma\left(j\frac{\pi}{m}+t\right)=\gamma\left(j\frac{2\pi}{m}-s\right)=R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma(s)=R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma\left(j\frac{\pi}{m}-t)\right), \tag{3.18}$$

como queríamos mostrar. □

Dessa maneira, neste trabalho, definimos a reflexão simétrica da seguinte forma:

Definição 3.1. *Uma curva parametrizada $\gamma(t)$ é simétrica reflexiva em relação à reta $y=\tan\left(jk\frac{\pi}{m}\right)x$ se, para cada $j=1,\ldots,2m-1$, e para todo ponto na curva, a imagem do ponto refletido em relação à reta $y=\tan\left(jk\frac{\pi}{m}\right)x$ também pertence à curva. Isso é expresso por*

$$\gamma\left(j\frac{\pi}{m}+t\right)=R_{jk\frac{\pi}{m}}\gamma\left(j\frac{\pi}{m}-t\right), \tag{3.19}$$

onde $R_{jk\frac{\pi}{m}}$ é uma matriz de reflexão é dada por

$$R_{jk\frac{\pi}{m}}=\begin{bmatrix}\cos\left(2jk\frac{\pi}{m}\right) & \sin\left(2jk\frac{\pi}{m}\right)\\ \sin\left(2jk\frac{\pi}{m}\right) & -\cos\left(2jk\frac{\pi}{m}\right)\end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

A Definição 3.1 lida com a simetria em termos de deslocamentos $(\pi/m)+t$ e $(\pi/m)-t$. Também podemos destacar que:

- Simetria Espelhada: usa t e $-t$ diretamente, considerando reflexões em torno de um ponto ou linha específica sem necessidade de deslocamento adicional.

- Definição 3.1: considera a reflexão ao longo de uma linha inclinada por $jk\frac{\pi}{m}$ e desloca os pontos por π/m para definir a simetria.

A partir de (3.11) e usando a notação γ_j como restrição da curva γ, ao intervalo $\big((j-1)\frac{\pi}{m}, j\frac{\pi}{m}\big)$, podemos concluir que a curva é construída da seguinte maneira.

Algoritmo 1: Geração de curvas parametrizadas usando reflexões

Dados: Constantes M, m e k. Curva parametrizada γ_1.
Resultado: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_{2m-1} \cup \gamma_{2m}$.

```
γ|_[0,π/m) ← γ_1
para j ← 1 to 2m − 1 faça
    Defina a reta L_j por y = tan(jk π/m)x;
    Reflita γ_j em relação a L_j para obter γ_{j+1} usando (3.11);
    γ|_((j π/m,(j+1) π/m)) ← γ_{j+1}
Retorne γ.
```

Nas Figuras 3a, 3b e 4, ilustramos a construção usando o Algoritmo 1 para as curvas dadas por:

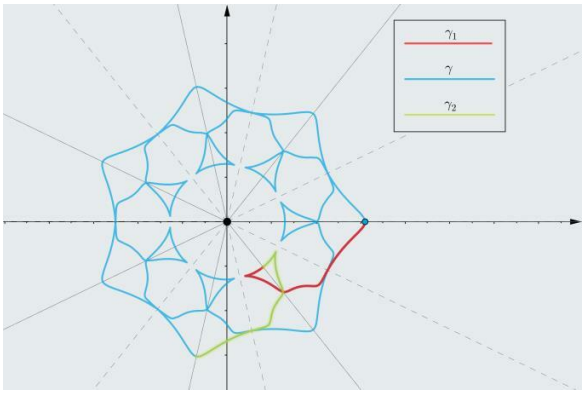
$$\begin{aligned}\gamma(t) =& \exp(-i2t) + 0,4\exp(-i9t) + 0,05\exp(i26t) + 0,05\exp(-i23t) + \\ &+ 0,05\exp(-i40t)\,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) =& \exp(-it) + \exp(-it) + 0,4\exp(i19t) + 0,05\exp(-i16t) + \\ &+ 0,05\exp(i29t) + 0,04\exp(-i176)\,,\end{aligned} \tag{3.22}$$

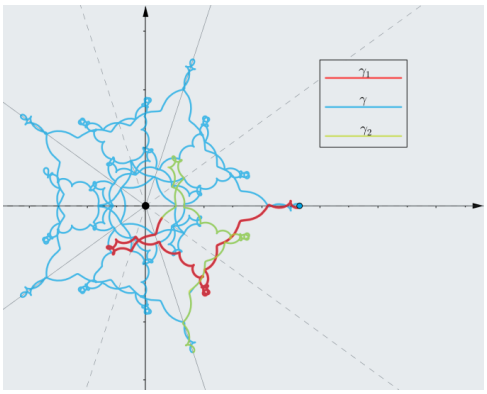
$$\gamma(t) = 0,6\exp(-i13t) + \exp(-i23t) + 0,55\exp(-i37t) + 0,15\exp(-i299t)\,. \tag{3.23}$$

A curva apresentada na Figura 3a é gerada por γ_1 dada pela equação (3.21) com $t \in [0, \frac{\pi}{7})$, já γ_2 é obtida como resultado da reflexão de γ_1 em relação à reta L_1 dada por $y = \tan(\frac{5\pi}{7})x$, agora γ_3 é o resultado de refletir γ_2 em relação à reta $y = \tan(\frac{10\pi}{7})x$, e assim por diante até obter γ_{14}. Observe que $\gamma|_{(j\frac{\pi}{7},(j+1)\frac{\pi}{7})} = \gamma_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, 13$.

Na Figura 3b, a curva ilustrada é construída a partir de γ_1 dada pela equação (3.22) com $t \in [0, \frac{\pi}{5})$. A curva γ_2 é obtida refletindo γ_1 em relação à reta L_1 definida por $y = \tan(\frac{4\pi}{5})x$. Ao seguir o algoritmo, obtemos $\gamma_3, \ldots, \gamma_{10}$. Note que $\gamma|_{(j\frac{\pi}{5},(j+1)\frac{\pi}{5})} = \gamma_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, 9$.



(a) Com $m = 7$ e $M = k = 5$ temos γ uma curva simétrica reflexiva dada em (3.21).



(b) Se $M = 6$, $m = 5$ e $k = 4$, temos γ curva simétrica reflexiva dada em (3.22).

Figura 3: Curvas construídas usando o vetor normal de uma curva simétrica rotacional.

A curva mostrada na Figura 4 é formada a partir de γ_1 especificada pela equação (3.23) com $t \in [0, \frac{\pi}{12})$. A curva γ_2 surge da reflexão de γ_1 em relação à reta L_1, que é dada por $y = \tan(\frac{\pi}{12})x$. Aplicando o algoritmo, são obtidas as curvas $\gamma_3, \ldots, \gamma_{24}$. É importante observar que $\gamma|_{(j\frac{\pi}{12},(j+1)\frac{\pi}{12})} = \gamma_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, 23$.

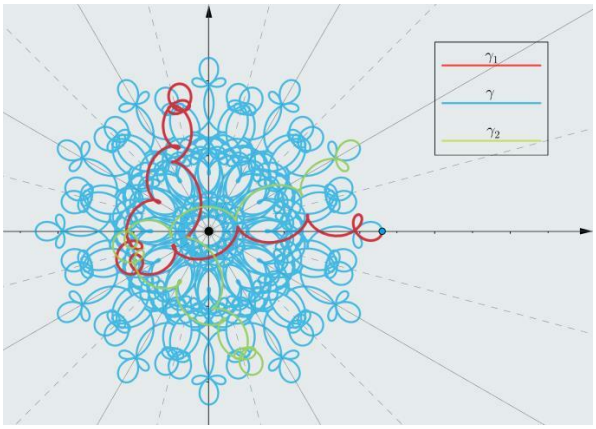


Figura 4: Curva parametrizada dada em (3.23), a qual é simétrica reflexiva com $M = 4$, $m = 12$ e $k = 1$.

3.1 Propriedades diferenciais de curvas simétricas rotacionais

A curva γ dada por (2.7), tem a derivada da curva e a norma dela, dadas por

$$\gamma'(t) = i\sum_{j=1}^{M} a_j r_j \exp(ia_j t) \quad \text{e} \quad \|\gamma'\| = \left|\sum_{j=1}^{M} a_j r_j \exp(ia_j t)\right| . \tag{3.24}$$

Já o vetor tangente unitário e o vetor normal unitário, respectivamente, são

$$\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{e} \quad \vec{N}(t) = \Delta_{\frac{\pi}{2}}\vec{T}(t) . \tag{3.25}$$

A seguir, mostraremos que uma curva paralela γ_d dada na Definição 2.4, também possui simetria de rotação.

Proposição 3.2. *Dada uma curva simétrica rotacional γ, tem-se*

$$\vec{T}\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\vec{T}(t) \quad e \quad \vec{N}\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\vec{N}(t) . \tag{3.26}$$

Adicionalmente, as curvas paralelas de γ também têm simetria de rotação.

Demonstração. Usando a ideia da demonstração do Teorema 2.6 na derivada de γ temos

$$\gamma'\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma'(t). \tag{3.27}$$

Usando (3.27) e o fato de que a matriz $\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}$ é ortogonal, obtemos

$$\left\|\gamma'\left(\frac{2\pi}{m}+t\right)\right\| = \left\|\Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma'(t)\right\| = \|\gamma'(t)\| . \tag{3.28}$$

Como consequênica de (3.28), basta multiplicar ambos os lados a igualdade (3.27) por $\|\gamma'(t)\|^{-1}$, para obter

$$\vec{T}\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\vec{T}(t) \quad \text{e} \quad \vec{N}\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\vec{N}(t) . \tag{3.29}$$

Dessa maneira, é imediato verificar que a curva $\gamma_d(t) = \gamma(t) + d\vec{N}(t)$ também é uma curva simétrica rotacional, isto é,

$$\gamma_d\left(\frac{2\pi}{m}+t\right) = \Delta_{k\frac{2\pi}{m}}\gamma_d(t) . \tag{3.30}$$

□

Observamos que a partir de uma curva simétrica rotacional de ordem m, o gráfico de uma curva que represente ao vetor unitário normal seria aquela com a trajetória que coincide com um subconjunto do círculo unitário. Por esse motivo, nas Figuras 5, 6a e 6b só é considerada a curva $\Delta_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(t) = (-y'(t), x'(t))$, isto é, um vetor na direção do vetor normal só que não necessariamente de norma um.

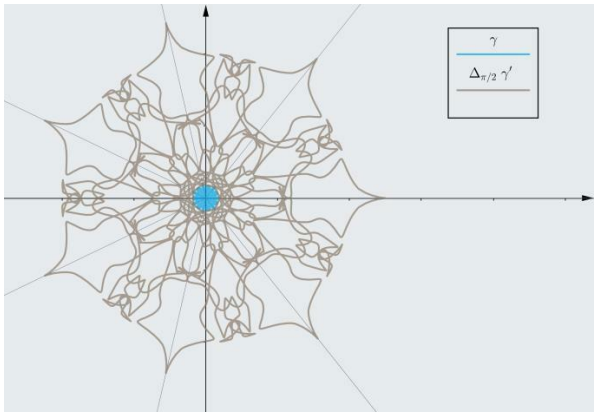


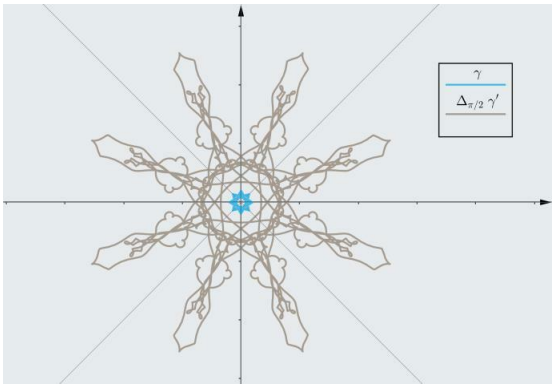
Figura 5: Curva $\Delta_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(t)$, com $M = 6$, $m = 7$ e $k = 4$, onde $\gamma(t)$ é dada em (3.31).

As curvas γ e $\Delta_{\frac{\pi}{2}}\gamma'$, das equações (3.31), (3.32) e (3.33), são ilustradas nas Figuras 5, 6a e 6b, respectivamente. Observe que todas elas tem raios $r_j = a_j^{-\ell}$, onde $\ell = 2$ ou $\ell = 3$.

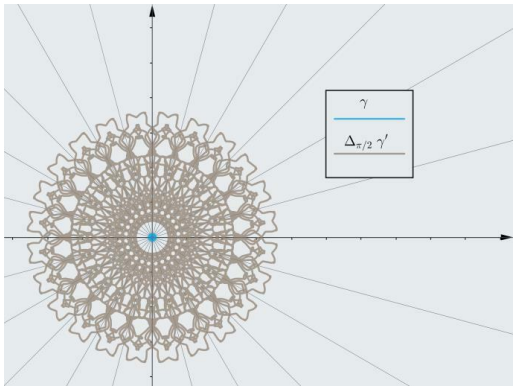
$$\begin{aligned}\gamma(t) =& 11^{-2}\exp(i11t) + 10^{-2}\exp(-i10t) + 25^{-2}\exp(i25t) + \\ &+ 108^{-2}\exp(-i108t) + 179^{-2}\exp(i179t) + 248^{-2}\exp(-i248t)\,,\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) =& 15^{-2}\exp(i15t) + 9^{-2}\exp(-i9t) + 31^{-2}\exp(i31t) + 25^{-2}\exp(-i25t) + \\ &+ 47^{-2}\exp(i47t) + 281^{-2}\exp(-i281t)\,,\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) =& 47^{-2}\exp(i47t) + 25^{-2}\exp(-i25t) + 95^{-2}\exp(i95t) + \\ &+ 577^{-2}\exp(-i577t) + 1559^{-2}\exp(i1559t) + 4033^{-3}\exp(i4033t)\,.\end{aligned} \tag{3.33}$$



(a) Para $M = 6$, $m = 8$ e $k = 1$, a curva $\Delta_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(t)$, com $\gamma(t)$ dada em (3.32).



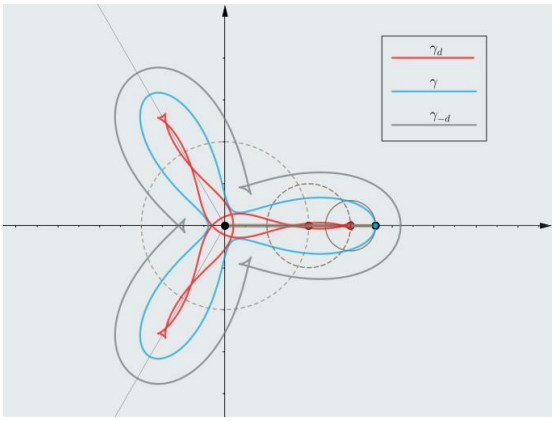
(b) Com $M = 6$, $m = 24$ e $k = 23$, podemos gerar a curva $\Delta_{\frac{\pi}{2}}\gamma$, usando (3.33).

Figura 6: Curvas construídas usando o vetor normal de uma curva simétrica rotacional.

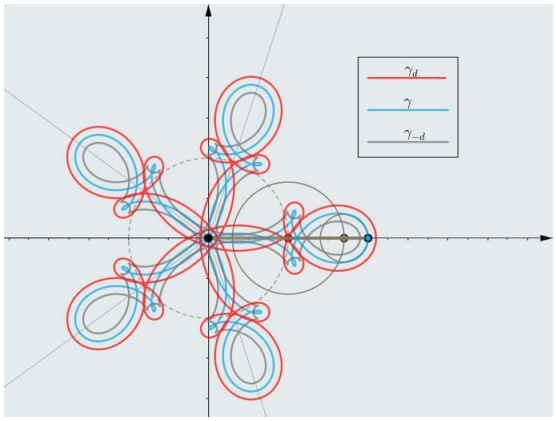
Nas Figuras 7a e 7b, são apresentadas curvas simétricas de ordem 3 e 5, respectivamente. Também são mostradas algumas curvas paralelas a elas

$$\gamma(t) = \exp(it) + \frac{1}{2}\exp(-i2t) + \frac{3}{10}\exp(i4t), \tag{3.34}$$

$$\gamma(t) = \exp(-i2t) + \frac{7}{10}\exp(i3t) + \frac{3}{10}\exp(i13t)\,. \tag{3.35}$$



(a) Se $M = m = 3$, $k = 1$ e $d = 3/10$, γ_d e γ_{-d} são paralelas a curva de (3.34).



(b) Se $m = 5$, $M = k = 3$ e $d = -1/10$, as curvas γ_d e γ_{-d} são paralelas a curva γ, dada em (3.35).

Figura 7: Curvas paralelas a curvas simétricas rotacionais.

3.2 Estudo da curvatura de uma curva simétrica rotacional

Nesta seção, estuda-se a curvatura de γ definida em (2.7). Usando a fórmula dada em (2.6) para calcular a curvatura κ da curva γ, obtemos

$$\kappa(t) = \frac{1}{||\gamma'(t)||^3}\left[\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} r_j a_j r_\ell a_\ell \cos((a_j - a_\ell)t)\right]. \tag{3.36}$$

Verifica-se que

$$\kappa\left(n\frac{\pi}{m} - h\right) = \kappa\left(n\frac{\pi}{m} + h\right), \tag{3.37}$$

para $h \in \left(0, \pi/m\right)$, sendo $n = 1, \ldots, 2m-1$, isto é, a curvatura κ é simétrica em relação à reta $t = n\pi/m$.

De fato, dado que $n(a_j - a_\ell)/m \in \mathbb{Z}$ para cada j e ℓ, temos

$$\operatorname{sen}((a_j - a_\ell)2\pi n/m) = 0 \quad \text{e} \quad \cos((a_j - a_\ell)2\pi n/m) = 1\,. \tag{3.38}$$

Logo, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\cos\left((a_j - a_\ell)\left(n\frac{2\pi}{m} - t\right)\right) &= \cos\left(n\left(\frac{a_j - a_\ell}{m}\right)2\pi\right)\cos((a_j - a_\ell)t) \\ &= \cos((a_j - a_\ell)t)\,.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Assim, usando a igualdade (3.36)

$$\kappa\left(\frac{2n\pi}{m} - t\right) = \frac{1}{||\gamma'(n\frac{2\pi}{m} - t)||^3}\left[\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} r_j a_j r_\ell a_\ell \cos((a_j - a_\ell)t)\right], \tag{3.40}$$

para cada $n = 1, \ldots, m$ e para qualquer t em que $\gamma'(2\pi n/m - t) \neq 0$. Como γ' é uma curva simétrica rotacional, obtemos

$$\left\|\gamma'\left(n\frac{2\pi}{m} - t\right)\right\| = \left\|\Delta_{nk\frac{2\pi}{m}} R_0 \gamma'(t)\right\| = \|\gamma'(t)\|\,.$$

Logo, obtemos

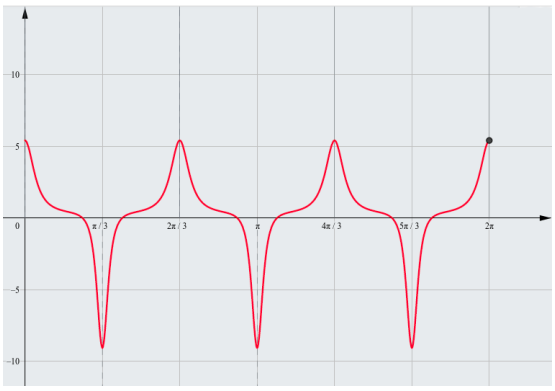
$$\kappa\left(\frac{2n\pi}{m} - t\right) = \kappa\left(t\right)\,.$$

Agora, substituímos $t = n\frac{\pi}{m} + h$, com $h \in (0, \pi/m)$. Podemos concluir

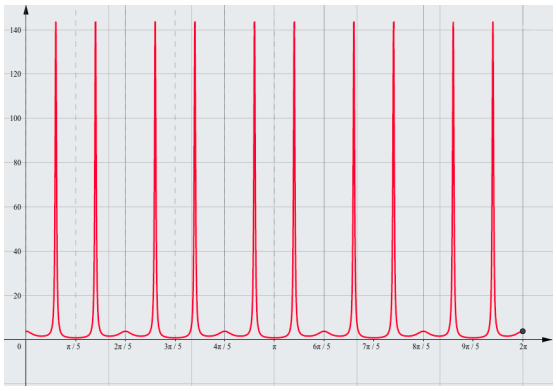
$$\kappa\left(n\frac{\pi}{m} - h\right) = \kappa\left(n\frac{\pi}{m} + h\right).$$

Portanto, a curvatura κ é simétrica em relação à reta $t = n\frac{\pi}{m}$, como desejado.

Usando (3.36), nas Figuras 8a e 8b, são apresentados os gráficos das curvaturas das curvas (3.34) e (3.35), respectivamente.



(a) A curvatura da curva dada em (3.34) é simétrica por reflexão à reta $t = n\pi/3$ no intervalo $((n-1)\pi/3, n\pi/3)$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



(b) O gráfico da curvatura da curva dada em (3.35) é simétrica por reflexão pela reta $t = n\pi/5$ no intervalo $((n-1)\pi/5, n\pi/5)$, para $j = 1, 2, \ldots, 9$.

Figura 8: Curvaturas simétricas de curvas simétricas rotacionais.

Até aqui foi provado teoricamente e mostrado com exemplos que a curva simétrica rotacional γ tem também curvas paralelas com simetria rotacional. Adicionalmente, observando a simetria reflexiva de γ verificamos que a curvatura κ exibe também simetria reflexiva.

3.3 Uma interação entre velocidades angulares e raios

O Teorema 2.6 e a Proposição 3.1 não estabelecem restrições para a escolha de r_j na curva dada em (2.7). Uma possível forma de determinar r_j é dada quando estudamos a derivada da curva γ dada em (3.24). Assim, para as velocidades angulares a_j, o produto $a_j r_j$ controla a intensidade da contribuição de cada componente na soma para a forma geral da curva e, por consequência, a natureza da velocidade $\|\gamma'\|$ ao longo da curva. Essa ideia é aplicada nos exemplos (3.31), (3.32) e (3.33).

A partir de (3.24), para o caso $M = 2$, determinamos um conjunto de curvas simétricas rotacionais que relacionem a congruência modular de a_j com r_j. Esse é o motivo pelo qual decidimos estudar a representação na circunferência unitária das potencias de g em $\mathbb{Z}_p^*$, onde p é un número inteiro positivo.

A seguir, consideramos um polígono com p lados inscrito no círculo unitário, conforme [7]. Cada vértice P_j representa uma potência de g módulo p para $j = 1, \ldots, p-1$, dado por

$$P_j = \left(\cos\left(g^j \frac{2\pi}{p}\right),\ \sin\left(g^j \frac{2\pi}{p}\right)\right). \tag{3.41}$$

Note que o ponto $(1, 0)$ não é considerado, pois estamos excluindo $j = 0$ na correspondência de g^j com os vértices P_j do polígono. Também, se p é um número primo e g é uma raiz primitiva de p cada vértice do polígono estaria representando a cada potência de g, garantindo que a correspondência seja bijetora. Caso contrário, essa correspondência não seria bijetora.

A forma de relacionar essas potências é por meio das cordas com extremos P_j e P_{j+1}, nas quais é possível escolher pontos Q_j, dados por

$$Q_j = P_j + \lambda\,(P_{j+1} - P_j)\ , \tag{3.42}$$

onde $\lambda \in [0, g+1]$.

A seguir, é determinada a equação da curva que passa por cada ponto Q_j.

$$\begin{aligned} &\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \\ &\qquad t \mapsto \left(1 - \frac{\lambda}{g+1}\right)\exp(it) + \left(\frac{\lambda}{g+1}\right)\exp(igt), \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $\lambda \in [0, g+1]$. Para verificar que a curva φ passa por Q_j, basta observar que

$$\varphi\left(g^j \frac{2\pi}{p}\right) = Q_j \tag{3.44}$$

para cada $j = 1, \ldots, p-1$. Na Figura 9, ilustra-se o que acontece se $p = 31$ e $g = 3$.

Para $\lambda \in [0, g+1]$, à medida que o ponto Q_j varia entre P_j e P_{j+1}, a curva φ dada em (3.43) varia entre as circunferências

$$\left(1 - \frac{\lambda}{g+1}\right)\exp(it) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\lambda}{g+1}\right)\exp(igt)\,.$$

Observe que a curva φ é simétrica rotacional módulo $m = g - 1$, onde $k = 1$. Note que a curva φ depende do parâmetro g, o qual influencia tanto na frequência angular quanto no raio das componentes. Essa dependência resulta em uma gama de formas geométricas e padrões, que são explorados na seguinte subseção.

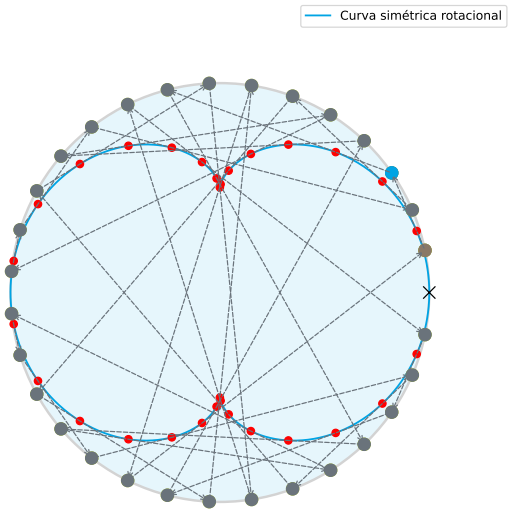


Figura 9: Para $p = 31$ e $g = 3$, quando $\lambda = 1$ a curva $\varphi(t) = (3/4)\exp(it) + (1/4)\exp(i3t)$ contém os pontos Q_j, os quais pertencem as cordas P_jP_{j+1}, para $j = 1, 2 \ldots, 30$.

3.3.1 Visualização de algumas curvas simétricas rotacionais

O código, desenvolvido em Python e executado no Google Colab, calcula e plota curvas parametrizadas para diferentes valores do parâmetro $\lambda \in (0, g + 1)$. Para realçar as propriedades visuais e matemáticas das curvas, utilizamos o colormap HSV, que fornece um gradiente contínuo e intuitivo de cores ao longo do espectro. Essa técnica também é amplamente aplicada no domínio colorido de funções complexas, permitindo uma representação visual clara e informativa das imagens dessas funções [2].

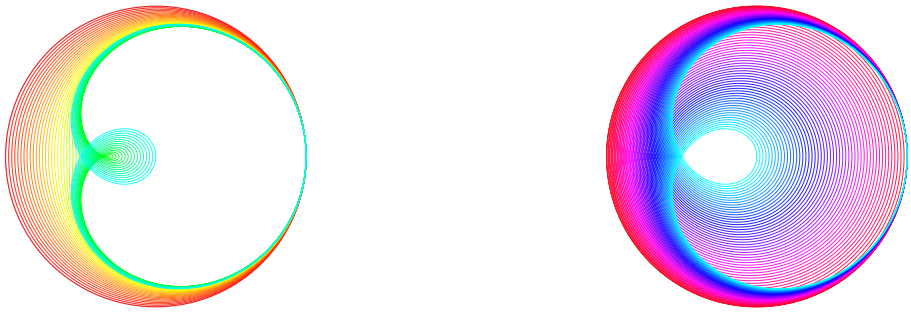
A Tabela 1 destaca as cores associadas a diferentes valores de λ, enfatizando como mudanças nesse parâmetro afetam a representação gráfica enquanto mantêm a coerência visual. As cores foram escolhidas para facilitar a distinção entre as curvas e realçar variações sutis no comportamento geométrico.

Tabela 1: Cores das curvas para diferentes valores de λ

λ	Cor da Curva
0 e $g + 1$	Vermelho
$(g + 1)/4$	Verde
$(g + 1)/2$	Ciano
$3(g + 1)/4$	Azul

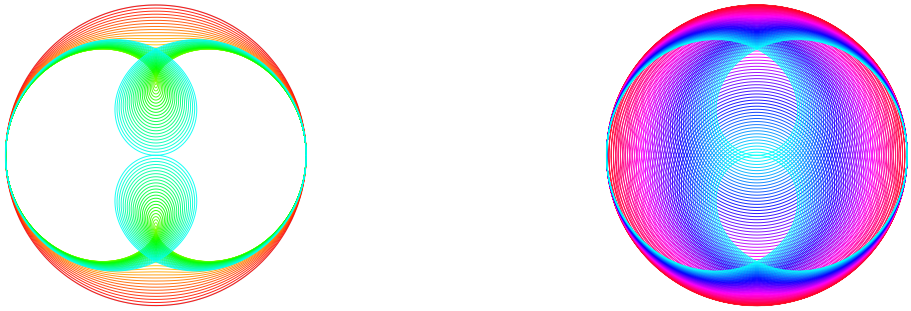
Nas Figuras 10, 11, 12 e 13, apresentamos as curvas geradas para $g = 2$, $g = 3$, $g = 5$ e $g = 6$, respectivamente. Podemos observar que esses números são raízes primitivas de números primos.

Adicionalmente, na Figura 14 e na Figura 15, apresentamos as curvas geradas para $g = 4$ e $g = 9$, respectivamente. Embora esses últimos números não possam ser raízes primitivas de qualquer número primo, eles proporcionam uma visão mais ampla da família de curvas dada em (3.43). Essa abordagem nos permite observar as propriedades geométricas das curvas independentemente das restrições impostas pelas raízes primitivas.



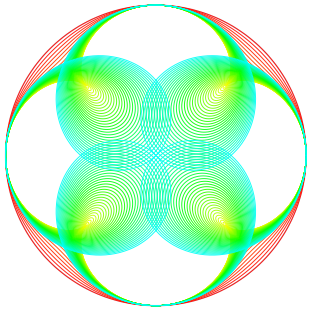
(a) Para valores de λ desde 0 a 3/2. (b) Para valores de λ desde 3 até 3/2.

Figura 10: Curvas com diferentes valores de λ para $g = 2$.

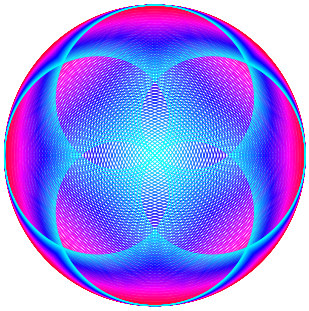


(a) Para valores de λ desde 0 a 2. (b) Para valores de λ desde 4 a 2.

Figura 11: Curvas com diferentes valores de λ para $g = 3$.

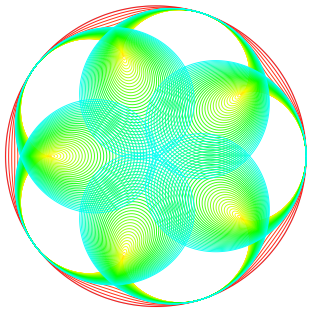


(a) Para valores de λ desde 0 até 3.

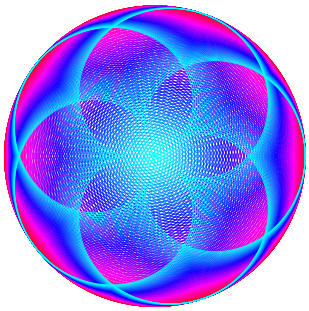


(b) Para valores de λ desde 6 to 3.

Figura 12: Curvas com diferentes valores de λ para $g = 5$.

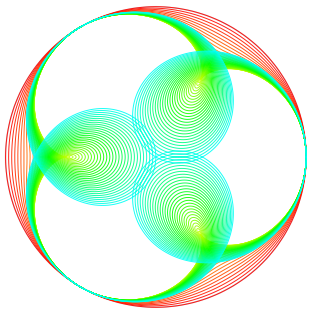


(a) Para valores de λ desde 0 to 7/2.

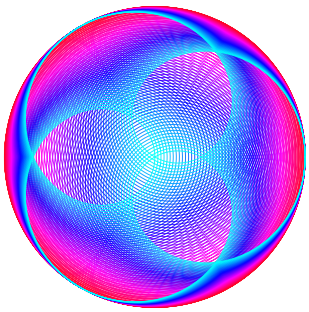


(b) Para valores de λ desde 7 até 7/2.

Figura 13: Curvas com diferentes valores de λ para $g = 6$.

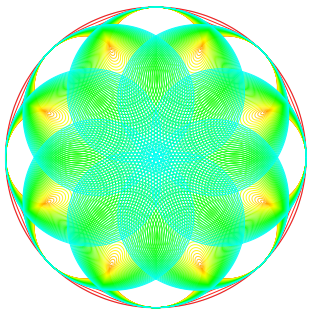


(a) Para valores de λ desde 0 até 5/2.

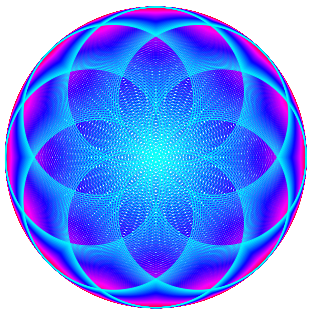


(b) Para valores de λ desde 5 até 5/2.

Figura 14: Curvas para diferentes valores de λ para $g = 4$.



(a) Para valores de λ desde 0 até 5.



(b) Para valores de λ desde 10 até 5.

Figura 15: Curvas com diferentes valores de λ para $g = 9$.

4 Conclusão

Neste trabalho, os resultados teóricos e os exemplos apresentados mostram que as curvas simétricas geradas não são produtos do acaso, mas sim o resultado direto de conceitos sólidos de álgebra e geometria. Também, foi explorada a simetria de curvas por meio da aplicação de congruência modular, introduzindo uma nova perspectiva acerca tanto da simetria rotacional de ordem m como da simetria reflexiva.

Usando o Algoritmo 1 mostrou-se que é possível parametrizar uma curva a partir de uma parte limitada de sua extensão e estender essa parametrização para todo o domínio utilizando rotações e reflexões, o que oferece uma abordagem para reconstruir curvas complexas com base em informações parciais.

Utilizando ferramentas de geometria diferencial, foram estabelecidas condições teóricas que garantem a simetria em curvas paramétricas bem como suas derivadas e curvas paralelas que preservam a simetria rotacional. Além disso, na última seção foi identificada uma interação específica entre os raios e as velocidades angulares em curvas simétricas rotacionais por meio de pontos inscritos em uma circunferência.

Referências

[1] Alencar, Hilário, Santos, Walcy, and Gregório, S. N. *Differential Geometry of Plane Curves*. American Mathematical Society, Providence, 2022.

[2] Campuzano, Juan Carlos Ponce. *Una introducción al método de dominio colorado con GeoGebra para la visualización y estudio de funciones complejas*. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, Vol. 9, No. 1 (2020), pp.

101-119. Available at: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/46753/31818. Acesso em: 15 de abr de 2024.

[3] Do Carmo, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Publications, Mineola, New York, 2016.

[4] Farris, Frank A. *Wheels on Wheels on Wheels-Surprising Symmetry*. Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 3 (1996), p. 185.

[5] Farris, Frank A., *Creating Symmetry: The Artful Mathematics of Wallpaper Patterns*, Princeton University Press, 2015.

[6] Goldman, Ronald. *Curvature formulas for implicit curves and surfaces*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 22, No. 7 (2005), pp. 632-658.

[7] Johnson, Iris DeLoach. *Paving the Way to Algebraic Thought Using Residue Designs*. The Mathematics Teacher, Vol. 91, No. 4 (APRIL 1998), pp. 326-332. National Council of Teachers of Mathematics. Available at: http://www.jstor.org/stable/27970543. Acesso em: 16 de abr de 2024.

[8] Liu, Yanxi, Hel-Or, Hagit, Kaplan, Craig S., and Van Gool, Luc, *Computational Symmetry in Computer Vision and Computer Graphics*, Now Publishers Inc., 2010.

[9] Pryamikov, A., Hadzievski, L., Fedoruk, M. et al. *Optical vortices in waveguides with discrete and continuous rotational symmetry*. J. Eur. Opt. Soc.-Rapid Publ. 17, 23 (2021). Disponível em: https://doi.org/10.1186/s41476-021-00168-5. Acesso em: 10 de abr de 2024.

Recebido em 25 de Setembro de 2024
Revisado em 15 de Janeiro de 2025
Aceito em 28 de Março 2025