

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO CONHECIDO TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS

A GEOMETRIC APPROACH TO THE WELL-KNOWN MEAN VALUE THEOREM FOR REAL FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Luciana Aparecida Alves

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Uberlândia

luciana.alves@ufu.br

Neiton Pereira da Silva

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Uberlândia

neiton@ufu.br

Comunicado por A. R. S. Santos

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma abordagem original de dois teoremas conhecidos do cálculo diferencial. Discutimos o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio para funções reais de duas variáveis reais. Mostramos que tais teoremas são obtidos adaptando as ideias das provas desses resultados no caso de funções de uma variável real. Além disso, obtemos uma aplicação do Teorema de Rolle, a qual relaciona a curvatura Gaussiana de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, dada por um gráfico de função, com a existência de curvas de níveis fechadas.

Palavras-chave: Teorema do Valor Médio; Função real de duas variáveis; Cálculo.

Abstract

In this work we present an original approach to two well-known theorems of differential calculus. We discussed Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem for real functions of two real variables. We show that such theorems are obtained by adapting the ideas from the proofs of these results in the case of functions of a real variable. Furthermore, we obtain an application of Rolle's Theorem, which relates the Gaussian curvature of a surface in $\mathbb{R}^3$, given by a function graph, with the existence of closed level curves.

Keywords: Mean Value Theorem; Real function of two variables; Calculus.

1 Introdução

Um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial de funções de uma variável real é o Teorema do Valor Médio de Lagrange (TVM), o qual é uma generalização do Teorema de Rolle. A importância do TVM se deve ao fato de sua ampla utilidade no cálculo, como, por exemplo, na aproximação de funções por polinômios de Taylor, no estudo de extremos locais de funções, bem como, na dedução da fórmula de comprimento de curvas regulares, áreas de superfícies e outras grandezas físicas, veja [1] ou [5]. Esses dois resultados são bem conhecidos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral dos diversos cursos de graduação em Matemática, Física e Engenharia. Entretanto, dois problemas interessantes e naturais que surgem são os seguintes:

Problemas: 1) O que seria uma generalização adequada desses dois teoremas para funções reais de duas variáveis reais? 2) O Teorema de Rolle e o TVM para funções de duas variáveis possuem interpretações geométricas análogas ao caso de funções de uma variável real? 3) Como seriam essas interpretações geométricas?

Neste artigo, abordamos as questões acima e oferecemos uma proposta de material didático para a generalização do Teorema de Rolle (Teorema 3.1) e do TVM (Teorema 4.1) para funções reais de duas variáveis reais, através de uma abordagem original de dois resultados conhecidos. Apresentamos um apelo geométrico, que pode servir como agente motivador por parte do professor para introduzir conceitos multidimensionais com uma abordagem visual. Mais precisamente, obtemos as seguintes generalizações para funções reais de duas variáveis.

Teorema de Rolle: Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ contendo uma curva C de nível k , ou seja, $C: f(x, y) = k$. Suponha que C seja uma curva fechada e simples delimitando uma região D . Se a restrição de $f|_{\text{int}(D) \cup C}$ é contínua e $f|_{\text{int}(D)}$ é diferenciável, então f admite um ponto P de extremo local em $\text{int}(D)$. Em particular, o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(P, f(P))$ é paralelo ao plano de equação $z = k$.

Teorema do Valor Médio: Sejam $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e π um plano não vertical que intercepta o gráfico de $z = f(x, y)$ em uma curva $(C, f(C))$ fechada e simples. Admita que a restrição de $f|_{\text{int}(D) \cup C}$ seja contínua e que $f|_{\text{int}(D)}$ seja diferenciável, onde D é a região delimitada por C . Então, existe um ponto $P \in \text{int}(D)$, onde o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em $(P, f(P))$ é paralelo ao plano π .

A abordagem do TVM que apresentamos nesse artigo tem a seguinte interpretação geométrica: “Para cada plano π (não vertical) que intercepta o gráfico $z = f(x, y)$

em uma curva fechada (e simples), existe um plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ paralelo a π , sob certas hipóteses de continuidade e diferenciabilidade de f'' (veja a Figura 6 do Exemplo 4.1). Na demonstração é usada a generalização para o Teorema de Rolle (Teorema 3.1) para funções de duas variáveis e a ideia para provar este último resultado é uma simples adaptação da demonstração deste teorema para funções reais de uma variável real, veja [4], p. 270.

Uma das várias aplicações do Teorema de Rolle e do TVM para funções de uma variável real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, é a convexidade da função f se $f''(x) \geq 0$, para $x \in I$. Como aplicação de nossa abordagem mostramos que, no caso de funções de duas variáveis, se a interseção de um plano paralelo a $z = 0$ com a superfície dada pelo gráfico da função $z = f(x, y)$, $f \in C^1$, é uma curva fechada e simples, então a superfície é localmente convexa. Se, além disso, $f \in C^2$, então a curvatura Gaussiana $K \geq 0$. Assim apresentamos uma relação entre a curvatura Gaussiana de superfície dada pelo gráfico de função e a existência de curvas de níveis fechadas e simples.

2 Preliminares

Nesta seção estabelecemos a notação que será usada e relembramos algumas noções básicas como: caminho simples e fechado, certos conceitos elementares de topologia em $\mathbb{R}^2$ e o Teorema de Weierstrass para funções de duas variáveis. Tais noções fazem parte do curso de cálculo e podem ser encontradas, por exemplo, em [3], [4], [5].

Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função vetorial da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. A função α é contínua se, e somente se, suas funções coordenadas $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas. Se α é contínua, sua imagem em $\mathbb{R}^2$ é chamada de *caminho*, que denotaremos por C . Este caminho C é dito fechado se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Dizemos que um caminho fechado C em $\mathbb{R}^2$, parametrizado por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, é *simples* se C não possui outras auto interseções, isto é, se $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.

Relembramos que, dado um ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, a *bola aberta* (na métrica usual) de centro P e raio r é o conjunto $B_r(P)$ dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cuja distância até P é menor que r , isto é:

$$B_r(P) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}.$$

Um conjunto D do plano é *limitado* se ele está contido em alguma bola aberta centrada na origem, ou seja, se existe $r > 0$ tal que $D \subset B_r(0)$. Pelo Teorema da Curva de Jordan, se C é um caminho fechado e simples no plano, então C delimita uma região D limitada do plano (uma prova deste teorema pode ser encontrada em [1], p. 474).

Um ponto P de $D \subset \mathbb{R}^2$ é *ponto interior* se existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(P) \subset D$. O *interior de D* é o conjunto dos pontos interiores a D , denotado por $\text{int}D$. Note que $\text{int}D \subset D$. Além disso, quando todos pontos de D são interiores, isto é, $D = \text{int}D$, dizemos que D é *aberto*.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ e X um ponto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que X é um *ponto da fronteira de D* , denotada por ∂D , se, para qualquer bola aberta B centrada em X , tem-se: $B \cap D \neq \emptyset$ e $B \cap (\mathbb{R}^2 - D) \neq \emptyset$. $D \subset \mathbb{R}^2$ é dito *fechado* se $D = \text{int}D \cup \partial D$, isto é, se D é a união (necessariamente disjunta) do conjunto dos pontos interiores a D com os pontos da fronteira de D .

É importante notarmos que, no nosso caso, fechado não é o contrário de aberto. Ou seja, um conjunto que não é fechado pode também não ser aberto ou um conjunto pode ser aberto e fechado simultaneamente. O plano $\mathbb{R}^2$, por exemplo, é aberto e fechado. O(a) leitor(a) pode, sem muita dificuldade, desenhar exemplos de conjuntos no plano que não são abertos nem fechados.

Um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ é chamado *compacto* se for limitado e fechado.

Terminamos esta seção com um teorema clássico do cálculo diferencial, o qual é também verdadeiro para funções reais definidas em ambientes mais gerais. Veja [3], p. 45.

Teorema 2.1 (Weierstrass). *Toda função real contínua $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, atinge seu máximo e seu mínimo em K , isto é, existem pontos $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in K$ tais que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$, para todo $(x, y) \in K$.*

3 Teorema de Rolle para funções de duas variáveis

Seja C um caminho fechado e simples no plano. Vimos na seção anterior que C é a fronteira de uma região limitada D do plano. Denotaremos por $\text{int}D$ o conjunto aberto dos pontos interiores à região limitada por C . Notemos ainda que o conjunto $D = \text{int}D \cup C$ é limitado e fechado, portanto, compacto.

Dada uma constante arbitrária k , uma *curva de nível* de uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, é o conjunto dos pontos em A que satisfazem a equação

$$f(x, y) = k.$$

Este conjunto pode ser vazio. Estamos interessados no caso em que ele é um caminho fechado e simples.

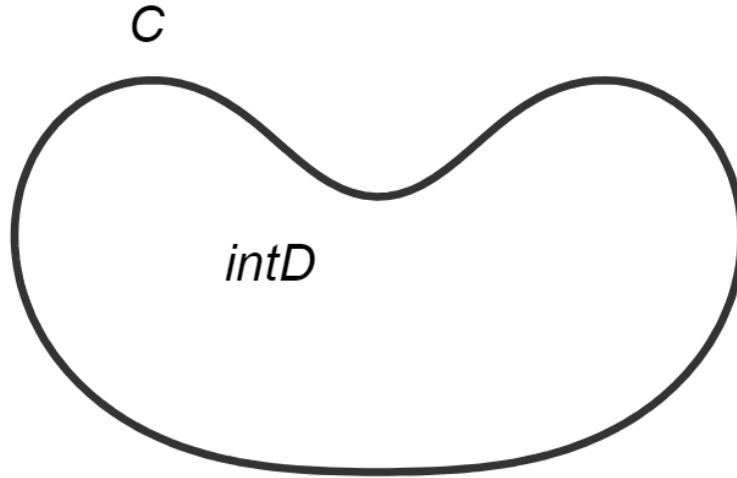


Figura 1: Conjunto compacto D com fronteira simples.

Abaixo apresentamos uma abordagem original, em termos de curvas de níveis, do Teorema de Rolle. Embora a demonstração deste teorema seja conhecida, adaptamos ela para a nossa abordagem em termos do interior de curva de nível com o intuito de fixar a ideia e a notação para obter uma boa compreensão das aplicações.

Teorema 3.1. *Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ contendo uma curva C de nível k , ou seja, $C: f(x, y) = k$. Suponha que C seja uma curva fechada e simples delimitando uma região D . Se a restrição de $f|_{\text{int}(D) \cup C}$ é contínua e $f|_{\text{int}(D)}$ é diferenciável, então f admite um ponto P de extremo local em $\text{int}D$. Em particular, o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(P, f(P))$ é paralelo ao plano de equação $z = k$.*

Demonstração. Considere o conjunto compacto $D = \text{int}D \cup C$. Se $f|_D$ for constante, então qualquer ponto em $\text{int}D$ é ponto de máximo e mínimo local.

Agora, suponha que $f|_D$ não seja constante. Sejam m e M os valores mínimo e máximo de f , respectivamente, no compacto D . Se f assume os valores m e M na curva de nível C , então $m = M$ e f é constante em D . Logo, f assume m ou M no interior de D , isto é, existe $P \in \text{int}D$ tal que $f(P) = m$ ou $f(P) = M$. $\square$

Exemplo 3.1. *Embora existam métodos tradicionais e eficazes do cálculo diferencial na busca de pontos extremos, o Teorema 3.1 pode ser usado para esse objetivo. Por exemplo, suponha que a temperatura de uma chapa de metal é conhecida ao longo de caminhos fechados. Então, supondo que a temperatura na chapa é uma função diferenciável, podemos concluir, pelo Teorema 3.1, que se existir um caminho fechado e*

simples C isotérmico (isto é, com temperatura constante ao longo de C) na chapa, então existe um ponto de temperatura máxima ou mínima (local) no interior da região delimitada por C .

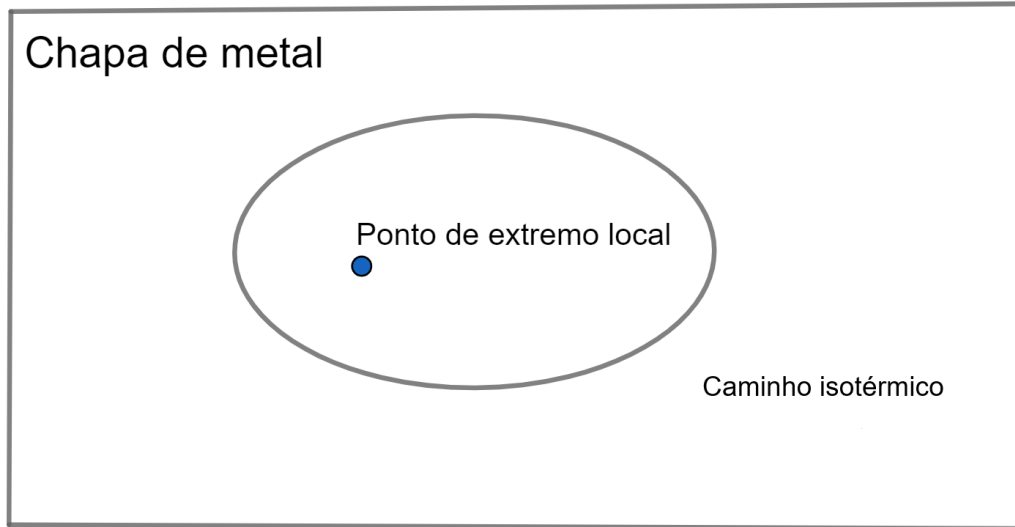


Figura 2: Representação de uma chapa de metal contendo um caminho fechado isotérmico.

Observação 3.1. Sob certas hipóteses sobre a função f , o Teorema 3.1 diz que, se existe uma curva de nível fechada, então existe um ponto extremo. Notemos que a recíproca desta afirmação é falsa, isto é, dada uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, um conjunto compacto $D \subset A$ (onde, portanto, f assume valores máximo e mínimo) pode não ter curva de nível fechada. Por exemplo, a função $z = 2x + y$ não tem nenhuma curva fechada e, por ser contínua, assume valores máximo e mínimo em qualquer conjunto compacto do plano.

Exemplo 3.2. Seja $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definida no disco fechado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. As curvas de nível de f são circunferências da forma

$$C_k: x^2 + y^2 = 1 - k^2, \quad \text{para } 0 \leq k < 1.$$

Além disso, para $0 \leq k < 1$, f é diferenciável em $\text{int}D_k$ e contínua no compacto $D_k = \text{int}D_k \cup C_k$, portanto, pelo teorema anterior f admite um ponto de extremo local em cada compacto D_k , para $0 \leq k < 1$.

Observe que esse ponto de extremo local é o ponto de máximo absoluto, isto é,

$$(0, 0) \in \bigcap_{0 < k \leq 1} D_k,$$

pois $\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 1 = f(0, 0)$ (veja a figura abaixo).

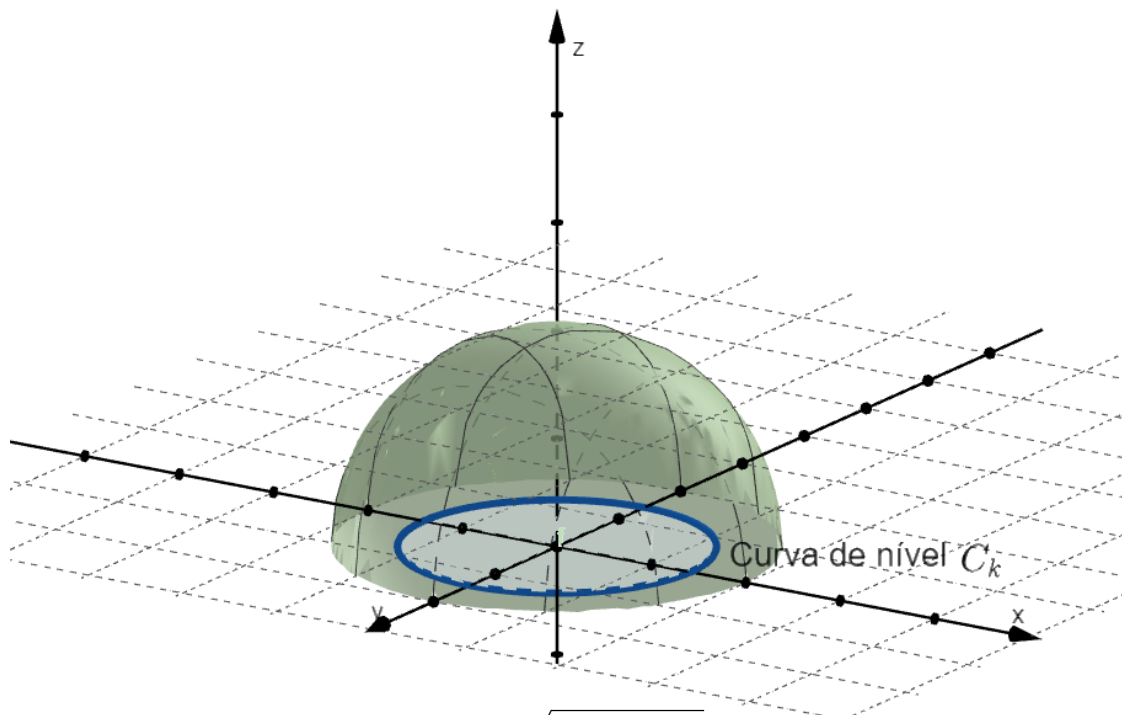


Figura 3: Gráfico de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e uma curva de nível C_k .

O teorema anterior pode ainda ser aplicado quando o caminho C é fechado, não simples, mas contém um caminho simples. Por exemplo, a curva abaixo contém três caminhos simples, de modo que o resultado anterior garante que no interior de cada um deles existe um ponto de extremo local, desde que as demais hipóteses sejam satisfeitas.

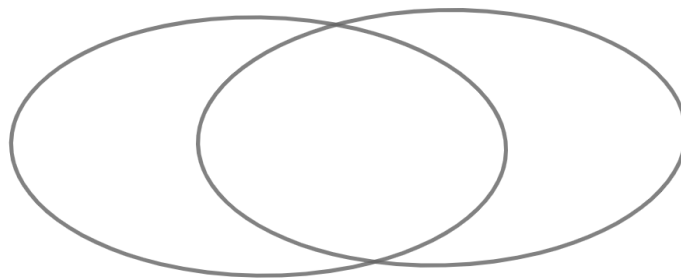


Figura 4: Caminho fechado contendo três caminhos fechados simples.

Exemplo 3.3. Considere a função $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$. O plano $z = 1$ intercepta o gráfico ao longo da curva

$$(2x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2} = 1$$

a qual é fechada e contém três caminhos fechados e simples, conforme destacada na figura abaixo. No interior de cada um deles f admite um extremo local.

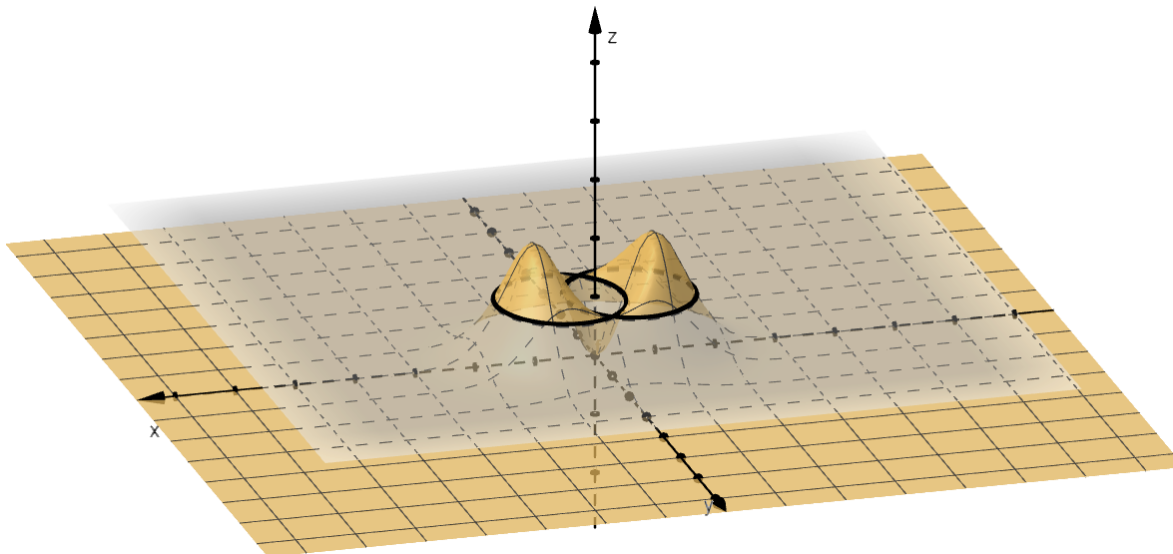


Figura 5: Gráfico de $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$ com o plano $z = 1$.

4 Teorema do Valor Médio para funções de duas variáveis

Nesta seção, apresentamos uma versão do Teorema do Valor Médio para funções de duas variáveis com uma abordagem geométrica análoga ao caso de funções de uma variável.

Chamamos de *plano vertical* qualquer plano com equação da forma $ax + by = c$, onde a , b e c são constantes. Isto é, o plano é vertical se for paralelo ao eixo z .

Observação 4.1. Dada $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, então qualquer caminho na superfície $z = f(x, y)$ é da forma $(C, f(C))$, para algum caminho C em A .

De fato, seja $\bar{C}$ um caminho no gráfico de f e $\bar{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $a \leq t \leq b$, uma parametrização de $\bar{C}$. O caminho C parametrizado por $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$, com $a \leq t \leq b$, é exatamente a projeção ortogonal de $\bar{C}$ no plano xy . Como o caminho $\bar{C}$ está na superfície $z = f(x, y)$, obtemos $\bar{\gamma}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$, com $a \leq t \leq b$ e, portanto, o caminho $\bar{C}$ é da forma $(C, f(C))$.

Agora apresentamos uma abordagem geométrica do conhecido Teorema do Valor Médio. Esta abordagem permite uma interpretação geométrica do TVM para funções de duas variáveis reais análoga ao caso de uma variável real.

Teorema 4.1. *Sejam $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e π um plano não vertical que intercepta o gráfico de $z = f(x, y)$ em uma curva $(C, f(C))$ fechada e simples. Admita que a restrição de $f|_{\text{int}(D) \cup C}$ seja contínua e que $f|_{\text{int}(D)}$ seja diferenciável, onde D é a região delimitada por C . Então, existe um ponto $P \in \text{int}(D)$, onde o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em $(P, f(P))$ é paralelo ao plano π .*

Demonstração. Suponha que π tenha equação $z = ax + by + c$. Defina $g(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$, onde $(x, y) \in A$. Então $g|_{\text{int}(D) \cup C}$ é contínua e $g|_{\text{int}(D)}$ é diferenciável. Além disso, $g|_C \equiv 0$. Então, pelo teorema anterior, g admite um ponto de máximo ou mínimo local em $\text{int}(D)$. Ou seja, existe $P = (x_0, y_0) \in \text{int}(D)$ tal que o plano tangente ao gráfico de g em $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ é horizontal, isto é, tem equação da forma $z = k$, onde k é uma constante. Desde que o vetor normal do plano tangente ao gráfico de g é dado por

$$\vec{n}_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - a, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - b, -1 \right),$$

e paralelo ao vetor normal do plano $z = k$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b. \quad (4.1)$$

Logo, o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em (x_0, y_0) é paralelo ao plano π . □

Na prova do teorema anterior, observe que as equações obtidas em (4.1) podem ser obtidas fazendo $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, tendo que em vista que o ponto (x_0, y_0) é um ponto crítico de g .

Exemplo 4.1. *Sejam $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ e π_1 o plano de equação $x + y + z = 1$. O plano π_1 intercepta o gráfico de f ao longo de uma curva fechada cuja projeção no plano xy é a circunferência de equação*

$$C: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Como f é diferenciável em todo plano (em particular, no compacto $\text{int}D \cup C$) segue, pelo teorema anterior, que existe P no gráfico de f tal que o plano tangente ao gráfico em P é paralelo a π_1 . Esse plano tangente tem equação

$$\pi_2 : \quad z = \frac{7}{2} - x - y.$$

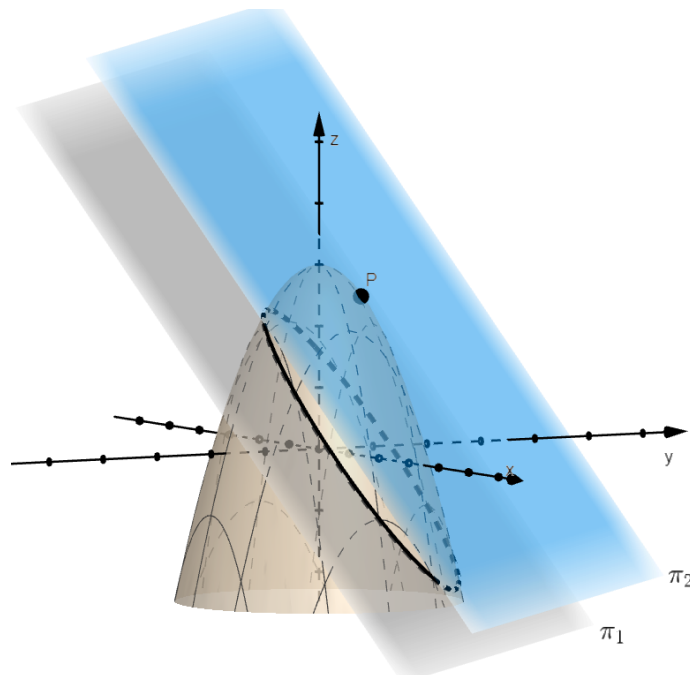


Figura 6: Gráfico da função $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ com os planos π_1 e π_2 .

5 Uma aplicação do Teorema 3.1

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do Teorema de Rolle na geometria das superfícies em $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, apresentamos uma relação entre a existência de curva de nível fechada e a curvatura Gaussiana da superfície $z = f(x, y)$. Para noções básicas dos conceitos usados nesta seção, veja [1] e [3].

Considere $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), onde A é um aberto de $\mathbb{R}^2$. O gráfico de f , dado por

$$S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in A\},$$

é uma *superfície regular de classe C^r* .

Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é *localmente convexa* em um ponto $p \in S$ se existe uma vizinhança $V \subset S$ de p tal que V está contida em um dos semi-espacos fechados determinados pelo plano tangente $T_p S$ em $\mathbb{R}^3$. Se, além disso, $V \cap T_p S = \{p\}$, então S é *estritamente localmente convexa* em p .

Exemplo 5.1. Considere a função $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Notemos que a origem $(0, 0)$ é um ponto de mínimo (absoluto) de f , pois $f(0, 0) = 1 \leq 1 + x^2 + y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Com isto, o gráfico de f , o qual pode ser visto como a superfície regular parametrizada $\rho(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é estritamente localmente convexa em $(0, 0)$, já que a origem é um mínimo estrito de f .

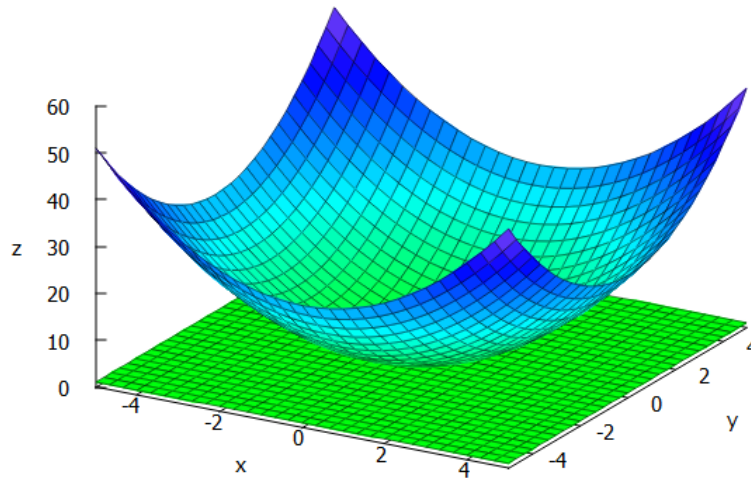


Figura 7: Convexidade local do gráfico de $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ em $(0, 0, 1)$.

O próximo resultado é uma aplicação da nossa abordagem do Teorema de Rolle para funções de duas variáveis. Ele apresenta uma relação entre a existência de curvas de níveis fechadas e a curvatura Gaussiana de gráficos de funções de classe C^2 . O item (b) pode ser obtido pelo Teorema de Gauss-Bonnet, um dos principais resultados em geometria de superfícies, mas a prova obtida aqui é muito mais elementar.

Teorema 5.1. Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\rho(u, v) = (u, v, f(u, v))$, onde f é uma função definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que exista um plano paralelo ao plano xy cuja interseção com S contém um caminho fechado e simples. Então:

(a) Se S é superfície regular de classe C^1 , então existe um ponto $p \in S$ onde S é localmente convexa.

(b) Se S é superfície regular de classe C^2 , então existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) \geq 0$.

Demonstração. (a) Suponha que a interseção de S com um plano π paralelo ao plano xy e, portanto, de equação $z = k$, contém um caminho fechado e simples C' . Então, qualquer parametrização de C' tem a forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), k)$, $t \in [a, b]$, com $(x(t), y(t)) \in A$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$. Por hipótese, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, se $t_1, t_2 \in (a, b)$ e $t_1 \neq t_2$. Então, a projeção ortogonal $\beta(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, de C' no plano xy , a qual denotaremos pelo caminho C , é também um caminho fechado e simples. Na verdade, como a superfície S é o gráfico da função f , o caminho C é a curva de nível k de f , fechada e simples de equação

$$f(x, y) = k.$$

Pelo Teorema 3.1, f admite um ponto $(u_0, v_0) \in \text{int}C$ de extremo local. Suponha que (u_0, v_0) seja um ponto de mínimo local de f . Então, existe uma vizinhança aberta $U \subset A$ de (u_0, v_0) tal que

$$f(u, v) \geq f(u_0, v_0), \text{ para todo } (u, v) \in U. \quad (5.1)$$

Observe que $U \times \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}^3$. Logo, $V = S \cap (U \times \mathbb{R})$ é uma vizinhança aberta de S que contém o ponto $p = \rho(u_0, v_0)$. Como (u_0, v_0) é ponto de mínimo de f , o plano tangente a S em p tem equação $z = f(u_0, v_0)$. Pela equação (5.1), concluímos que os pontos da vizinhança V estão no semi-espço fechado $z \geq f(u_0, v_0)$ determinado pelo plano tangente a S em p . Portanto, S é localmente convexa em p . O caso onde (u_0, v_0) é um ponto de máximo local de f segue analogamente.

(b) Da demonstração do item (a), segue que $p \in S$ é um ponto de extremo local de f . Dessa forma, o determinante da matriz Hessiana de f em p é não negativo, isto é,

$$f_{xx}(p)f_{yy}(p) - f_{xy}^2(p) \geq 0.$$

Com isto, a curvatura Gaussiana

$$K(p) = \frac{f_{xx}(p)f_{yy}(p) - f_{xy}^2(p)}{1 + f_x^2(p) + f_y^2(p)} \geq 0.$$

□

O resultado anterior implica na seguinte relação entre curvatura Gaussiana de superfície que são gráficos de funções e suas curvas de níveis.

Corolário 5.1. Se o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ de classe C^2 num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ é uma superfície S de curvatura estritamente negativa, então f não admite curvas de níveis fechadas.

Exemplo 5.2. O parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ possui curvatura negativa, veja [1]. A interseção dessa superfície com qualquer plano paralelo ao plano xy são duas retas quando $z = 0$ e hipérboles para $z \neq 0$ e, portanto, não contém uma curva fechada e simples.

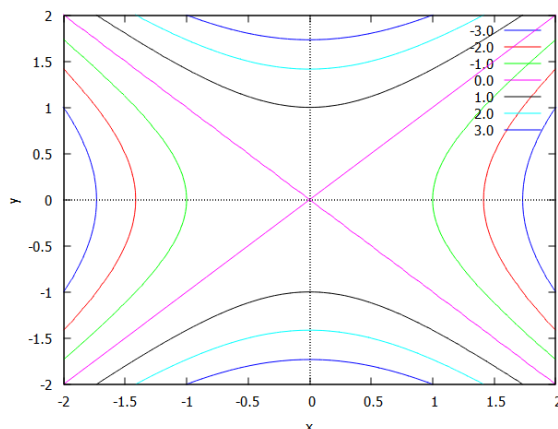


Figura 8: Algumas curvas de níveis de $z = x^2 - y^2$.

Observação 5.1. O teorema anterior pode ser aplicado de modo mais geral. Dados S uma superfície regular de classe C^2 e $q \in S$, segue pelo Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança aberta V de q em S , tal que V é gráfico de função de classe C^2 , digamos $y = g(x, z)$, definida em algum aberto do plano xz . Assim, pelo teorema anterior (com y no lugar de z), se a interseção de algum plano paralelo ao plano xz com V contém uma curva fechada e simples, então $K(p) \geq 0$, para algum ponto $p \in V$.

Dito de outra maneira, sejam S uma superfície regular de classe C^2 , $q \in S$ e V uma vizinhança aberta de S em V que é gráfico de função de classe C^2 , digamos $y = g(x, z)$, conforme o Teorema da Função Implícita. Se a curvatura Gaussiana de S é negativa, então qualquer seção obtida pela interseção de planos $y = k$ e V não contém uma curva fechada e simples.

6 Teorema de Rolle e o TVM em dimensões maiores

Os Teoremas 3.1 e 4.1 continuam válidos em dimensão $n > 2$, isto é, para funções reais de n variáveis reais. Isto ocorre porque o TVM pode ser obtido do Teorema de Rolle e este último pode ser provado usando o Teorema de Weierstrass, muito conhecido em casos mais gerais, inclusive em $\mathbb{R}^n$; como foi obtido em [2] (veja também [3], p. 141).

Além disso, é possível provarmos o Teorema de Rolle em dimensões maiores com um tratamento topológico: neste caso, nas hipóteses, alguma curva de nível em $\mathbb{R}^n$ deve pertencer a um fechado de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a uma esfera $(n - 1)$ dimensional. Então podemos usar o clássico Teorema de Weierstrass, entretanto, para isto é necessário garantir que a curva de nível seja fronteira de um compacto e, para isso o Teorema de Jordan-Brower implica que o complemento de um fechado homeomorfo a uma esfera possui duas componentes, uma limitada (o interior) e outra ilimitada (o exterior).

Convém salientarmos que o Teorema do Valor Médio é conhecido em diferentes abordagens mais gerais, para funções de n variáveis reais. Em [3], p. 141, encontra-se a seguinte versão do TVM em termos das derivadas direcionais:

Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto $(a, a + v)$ e contínua na restrição ao segmento fechado $[a, a + v] \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = df(a + \theta v) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i, \quad (6.1)$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Com as hipóteses acima, este resultado tem a seguinte implicação geométrica: o gráfico da restrição de f ao segmento de reta segmento fechado $[a, a + v]$ é a imagem da curva $\gamma(t) = (a + tv, f(a + tv))$, $t \in [0, 1]$, a qual é diferenciável em $(0, 1)$ e contínua em $[0, 1]$ (já que f é diferenciável em $(a, a + v)$ e contínua em $[a, a + v]$). A equação (6.1) implica que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que a reta tangente à curva $\gamma(t) = (a + tv, f(a + tv))$, $t \in (0, 1)$, no ponto $\gamma(\theta)$ é paralela à reta determinada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a + v, f(a + v))$. De fato, os vetores diretores destas duas retas são $\gamma'(\theta) = (v, df(a + \theta v) \cdot v)$ e $(v, f(a + v) - f(a))$, respectivamente. Observe que, neste caso, a generalização ocorre por conta da equação (6.1) que se assemelha à equação do TVM clássico de função real de uma variável real.

Outra abordagem do TVM, obtida em [2], é a seguinte:

Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ com interior não vazio e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de classe C^1 em $\Omega = \text{int } K$. Se existem números reais $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que $f(P) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, para todo $P = (x_1, \dots, x_n)$ na fronteira de K , então existe $P_0 \in \Omega$ tal que $\nabla f(P_0) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

A interpretação geométrica deste resultado é que se, para todo P na fronteira de K , os pontos do gráfico de f da forma $(P, f(P))$ estão no mesmo hiperplano ϕ , dado por $x_{n+1} = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, então existe P_0 no interior de K tal que $\nabla f(P_0)$ é ortogonal a ϕ , ou seja, o hiperplano tangente ao gráfico de f no ponto $(P_0, f(P_0))$ é paralelo a ϕ .

Notemos que, a interpretação geométrica do Teorema 4.1 é equivalente ao enunciado anterior, no caso para $n = 2$. Entretanto, esta versão é apresentada de forma puramente algébrica enquanto a abordagem do TVM apresentada neste trabalho e obtida de forma totalmente distinta e independente, possui um enfoque estritamente geométrico justamente com o objetivo de facilitar a compreensão do mesmo em cursos de cálculo.

Agradecimento: Os autores agradecem o avaliador pelas as correções e sugestões que permitiram melhorar o artigo com uma notação mais agradável e uma redação mais didática.

Referências

- [1] do Carmo, M. P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [2] Koceić-Bilan, N.; Mirošević, I. *The Mean Value Theorem in the Context of Generalized Approach to Differentiability*. Mathematics **11**, (2023), 4294.
- [3] Lima, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 2. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA; CNPq, 2000. (Projeto Euclides).
- [4] Lima, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 1. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA; 2004. (Projeto Euclides).
- [5] Pinto, Diomara; Morgado, Maria Cândida Ferreira. Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis. 4. ed. São Paulo: Editora UFRJ/SR-1, 2001.

Recebido em 09 de Junho de 2024

Revisado em 02 de Junho de 2025

Aceito em 05 de Junho de 2025