Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i1.19950

# LOGARITMOS E A TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DE QUESTÕES DE VESTIBULAR

## Logarithms and the Theory of the Three Worlds of Mathematics: an analysis of university entrance exam questions

Gabriel Ribeiro Padilha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
gabrielribeiro.05.2016@gmail.com

**Resumo**

Este trabalho apresenta uma análise de nove questões que envolvem logaritmos do Concurso Vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, aplicadas entre os anos de 2018 e 2024, considerando os princípios da Teoria dos Três Mundos da Matemática para identificar as dimensões do pensamento matemático que poderiam ser exploradas nessas questões. A análise das questões mostra que seu potencial quanto às dimensões do pensamento matemático em alunos pode estar de forma predominante nos fluxos de pensamento relacionados ao Mundo Operacional Simbólico. Em alguns casos, podem estimular nos alunos processos cognitivos do Mundo Conceitual Corporificado, e em todas podemos ter passagens pelo Mundo Formal Axiomático.
**Palavras-chave:** Logaritmo; Teoria dos Três Mundos da Matemática; Pensamento Matemático; Educação Matemática; David Tall.

**Abstract**

This paper presents an analysis of nine questions involving logarithms from the Entrance Examination of the Federal University of Rio Grande do Sul, applied between 2018 and 2024, considering the principles of the Three Worlds of Mathematics Theory to identify the dimensions of mathematical thinking that could be explored in these questions. The analysis shows that the potential of these questions to engage students' mathematical thinking lies predominantly in the thought processes related to the Symbolic Operational World. In some cases, they may stimulate cognitive processes from the Conceptual Embodied World, and in all cases, transitions through the Formal Axiomatic World can be observed.
**Keywords:** Logarithm; Theory of Three Worlds of Mathematics; Mathematical Thinking; Mathematics Education; David Tall.

## INTRODUÇÃO

Os logaritmos podem desempenhar um papel crucial no aperfeiçoamento de habilidades matemáticas do indivíduo e no desenvolvimento do conhecimento científico. Sua aplicação estende-se ao longo da trajetória educacional, permeando não apenas a Matemática, mas também disciplinas como Física, Química e Geografia. Na disciplina de

Matemática, é previsto que sejam introduzidos de forma sistemática no primeiro ano do Ensino Médio, seguindo os critérios curriculares dispostos em duas habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresentadas a seguir:

> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. [...]
> (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função (Brasil, 2018, p. 536;544).

É comum que os logaritmos apareçam em questões de processos seletivos, como o Concurso Vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Vestibular UFRGS), um dos mais disputados do Brasil, cujo objetivo é selecionar candidatos para as vagas dos cursos de graduação nas diversas áreas oferecidas pela universidade. O Vestibular UFRGS ocorre anualmente, sendo responsável pelo preenchimento de 70% das vagas da instituição, enquanto o Sistema de Seleção Unificada (SiSU), por meio das notas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), permite a entrada dos 30% restantes. Vale ressaltar que a UFRGS é uma das universidades do Brasil que ainda mantêm seu próprio processo seletivo, enquanto outras universidades do país têm como única forma de ingresso os programas que usam a nota do ENEM.

Tem sido dada grande importância aos cursos de ensino superior, em especial aos gratuitos, oferecidos majoritariamente em instituições públicas ou por meio de programas sociais em instituições privadas. Diante disso acreditamos que estudos envolvendo as questões desses processos de seleção possuem potencial de trazer reflexões e discussões interessantes para o campo da Educação (Matemática).

De acordo com Padilha e Araújo (2024):

> Quando analisamos questões de processos seletivos, podemos ter várias perspectivas. Isso pode começar com a escolha e definição de nosso objetivo para com as respectivas análises. Entre alguns objetivos estão: a análise de questões para obter uma compreensão de seus processos de resolução; **análise de questões para compreender os fluxos de pensamento, com base em uma teoria de aprendizagem específica, que os alunos podem aplicar ao resolvê-los ou compreendê-los;** análise de questões para levantar dúvidas sobre sua elaboração; e assim por diante (Padilha e Araújo, 2024, p. 2, grifo nosso).

Diante do exposto, o presente trabalho apresenta uma análise de nove questões que

envolvem logaritmos do Vestibular UFRGS, aplicadas entre os anos de 2018 e 2024, considerando os princípios da Teoria dos Três Mundos da Matemática (TTMM) para identificar as dimensões do pensamento matemático que poderiam ser exploradas nessas questões. A TTMM foi proposta pelo educador matemático inglês David Tall (2013) e busca descrever os diferentes níveis do desenvolvimento do pensamento matemático.

## TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Em Tall (2013), temos a apresentação da TTMM, que postula a existência de três "mundos" distintos no desenvolvimento do pensamento matemático: Mundo Conceitual Corporificado (MCC), Mundo Operacional Simbólico (MOS) e Mundo Formal Axiomático (MFA). Segundo Tall (2013), o MCC:

> Baseia-se nas ações e percepções humanas, desenvolvendo imagens mentais que são verbalizadas de modo cada vez mais sofisticado e tornam-se entidades mentais perfeitas em nossa imaginação (Tall, 2013, p. 16, tradução nossa).

Assim, no MCC os primeiros passos podem começar por meio das ações e experiências no mundo real, ocorrendo principalmente quando os estudantes estão envolvidos com objetos físicos e manipulativos. Um exemplo disso é o material dourado, o qual oportuniza que o estudante manipule as peças e possa entender as principais diferenças entre unidade, dezena, centena, milhar. Além disso, por meio do acréscimo e da retirada de peças, pode-se facilitar a aprendizagem dos conceitos de adição e subtração.

No entanto, a manipulação de objetos físicos não é a única forma de transitarmos pelo MMC. De acordo com Padilha (2024, p. 10), “[...] a manipulação direta de objetos físicos não é necessária, pois o indivíduo pode explorá-los mentalmente, analisando-os e formando conjecturas sobre suas propriedades ou situações específicas, como, por exemplo, a concepção de uma linha perfeitamente reta”. Assim, o primeiro mundo, o MCC, pode ser considerado essencial para a construção de uma definição a respeito de algum objeto matemático e para proporcionar aos alunos um entendimento prático dos conceitos matemáticos.

Já o MOS, segundo Tall (2013):

> Cresce além de ações físicas dos procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos podem permanecer em um nível processual, outros podem conceber os

> símbolos de forma flexível, como as operações a realizar e também operar, por meio de cálculo e manipulação (Tall, 2013, p. 16-17, tradução nossa).

O MOS é o mundo em que ocorre a representação de imagens e ações matemáticas em símbolos matemáticos e operações da aritmética, da álgebra ou do cálculo. Esse segundo estágio é crucial para a transição do pensamento corporificado para o simbólico, permitindo que os alunos visualizem e representem conceitos matemáticos mediante a utilização de notações convencionadas. Retomando o exemplo anterior: se tivermos 1 milhar, 3 centenas, 2 dezenas e 9 unidades, a representação dessa quantidade como "1329" é um fenômeno típico do segundo mundo. Além disso, um aluno que aprende adição e subtração pode começar usando símbolos, como + e –, para representar essas operações.

Por fim, o MFA, de acordo com Tall (2013):

> Baseia-se no conhecimento formal de sistemas axiomáticos especificado pela definição cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas (Tall, 2013, p. 17, tradução nossa).

Nesse terceiro mundo estão presentes os postulados, as definições, as demonstrações, as estruturas lógicas que organizam o sistema axiomático da Matemática. No geral, na educação básica, trabalhamos apenas traços desse terceiro mundo, visto que a formalização das ideias matemáticas necessita de uma matemática em nível acadêmico, cabendo isso em especial a estudantes de cursos das Ciências Exatas e da Terra. Esses traços do MFA podem ser observados em livros didáticos da educação básica, como, por exemplo, algumas demonstrações – procedimentos emblemáticos do MFA – das propriedades dos logaritmos. No entanto, como observaremos nas análises, no Vestibular UFRGS é requerido apenas que se saiba manipular e aplicar essas propriedades, e não as formalizar.

Os três mundos do pensamento matemático, embora tenham suas características específicas, estão inter-relacionados, podendo haver fluxos de pensamento de um mundo para o outro.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para este estudo, foi realizada a análise de nove questões do Vestibular UFRGS (2018-2024) que envolvem os conceitos de logaritmos. Para isso, utilizou-se os

pressupostos da TTMM a fim de identificar as dimensões do pensamento matemático que poderiam ser exploradas nas questões.

Nosso objetivo não é ensinar sobre logaritmo ou como aplicá-los na resolução das questões do Vestibular UFRGS; no entanto, apresentaremos possíveis resoluções para as questões como parte da análise. Quanto à natureza da pesquisa, esta utiliza uma abordagem qualitativa (Borba, 2004), uma vez que temos interpretações subjetivas a respeito das dimensões do pensamento matemático que podem ser exploradas nas questões.

Considerando isso, para melhor compreender o espaço que o conteúdo de logaritmos ocupa no exame, analisamos as diretrizes estabelecidas no Manual do Candidato do Vestibular UFRGS 2024. Nele, para a prova de Matemática, há um trecho que trata especificamente dos conteúdos que poderão exigir conhecimentos sobre logaritmos:

> **Logaritmo** e Exponencial
> • Funções exponenciais: expressão; construção e interpretação de gráficos; propriedades
> • **Funções logarítmicas: expressão; construção e interpretação de gráficos; propriedades**
> • **Equações** exponenciais e **logarítmicas: resolução**
>
> (UFRGS, 2023, p. 97, grifo nosso).

O Vestibular UFRGS, durante um tempo considerável, tinha em sua prova 25 questões de cada disciplina. No ano de 2022, em decorrência da pandemia do Covid-19, a prova foi reformulada e contou com apenas 15 questões de cada disciplina, o que se manteve nos anos de 2023 e 2024. De forma a manter uma simetria em nosso recorte temporal, optamos por analisar as três provas realizadas após a pandemia do Covid-19 até hoje e as três anteriores. Assim, buscando as questões de Matemática do Vestibular UFRGS que abordavam o tema de logaritmo, junto do recorte temporal descrito acima, ficamos com um total de nove questões para analisar, conforme Quadro 1:

**Quadro 1:** Relação das questões selecionadas

| **Vestibular UFRGS** | **Nº de questões** | **Nº das questões** |
|---|---|---|
| **Antes da pandemia Covid-19** | | |
| 2018 | 2 | 35 e 37 |

| | | |
|---|---|---|
| 2019 | 2 | 31 e 34 |
| 2020 | 1 | 41 |
| **Depois da pandemia Covid-19** | | |
| 2022 | 2 | 46 e 49 |
| 2023 | 1 | 50 |
| 2024 | 1 | 50 |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para Creswell (2014), o processo de análise:

> [...] também envolve a **organização dos dados**, a **realização de uma leitura preliminar** da base de dados, a **codificação e organização dos temas**, a **representação dos dados** e a **formulação de uma interpretação deles**. Esses passos estão interconectados e formam uma espiral de atividades, todas elas relacionadas à análise e representação dos dados (Creswell, 2014, p. 146, grifo nosso).

Dessa forma, para análise das nove questões, optamos por representa-las no formato XXXX-XX (ano de aplicação do respectivo Vestibular UFRGS - número da questão) e dividi-las em três grupos. O primeiro engloba questões que envolvem uma substituição direta de valores e uso apenas da definição de logaritmo, não necessitando da aplicação ou manipulações das propriedades do logaritmo (2018-37). O segundo é referente às questões que exigem uso da definição e aplicação das propriedades para a obtenção de algum resultado (2018-35, 2019-34, 2020-41 e 2022-46). Por fim, o terceiro contém a análise de questões que envolvem mais de um conteúdo, como equações e funções quadráticas (2019-31 e 2022-49), progressão aritmética (2023-50) e progressão geométrica (2024-50).

## ANÁLISE DAS QUESTÕES E A TTMM

### Primeiro grupo

Neste primeiro grupo, fazemos a análise de apenas uma questão (Figura 1), a qual exige a substituição direta de um valor e o uso da definição de logaritmo.

**Figura 1:** Questão 37 do Vestibular UFRGS 2018

Leia o texto abaixo, sobre terremotos.

Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Para cobrir todos os tamanhos de terremotos, desde os microtremores de magnitudes negativas até os grandes terremotos com magnitudes superiores a 8.0, foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre. Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935: $\log(E) = 11,8 + 1,5M$ onde: $E$ = energia liberada em $Erg$ ; $M$ = magnitude do terremoto.

**Disponível em: <http://www.iag.usp.br/siae98/terremoto/terremotos.htm>. Acesso em: 20 set. 2017.**

Sabendo que o terremoto que atingiu o México em setembro de 2017 teve magnitude 8,2, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a energia liberada por esse terremoto, em $Erg$ .

(A) $13,3$

(B) $20$

(C) $24$

(D) $10^{24}$

(E) $10^{28}$

Fonte: COPERSE (2018, p. 16).

A questão inicia com um texto sobre terremotos, algo que, à luz da TTMM, tem o potencial para despertar múltiplos aspectos cognitivos no indivíduo que entra em contato com ela, adentrando o primeiro domínio (MCC). Nessa leitura, os estudantes podem ser desafiados a compreenderem como alguns conceitos básicos associados à medição de terremotos se relacionam – quais sejam, a magnitude e a energia liberada.

O enunciado fornece informações sobre os terremotos e sua relação com os logaritmos por meio do que chama de *escala logarítmica*, a qual é definida pela fórmula de Gutenberg e Richter (originalmente apresentada em 1935). Em seguida, o próximo passo requer que os alunos interpretem as informações apresentadas no texto e apliquem-nas a uma situação específica. Nesse caso, os alunos precisam entender a relação entre a magnitude de um terremoto e a quantidade de energia sísmica liberada. Essa compreensão é crucial para avançar na resolução da questão, pois permite que eles conectem a magnitude de 8,2 do terremoto no México com a fórmula fornecida para calcular a energia. Assim, identificamos que os aspectos do pensamento matemático necessários para a solução por

parte do estudante se concentram no MCC e MOS. A resolução desta questão está disposta no Quadro 2, a seguir:

**Quadro 2:** Resolução da questão 37 do Vestibular UFRGS 2018

| **Resolução da 2018-37 – Gabarito: D** |
|---|
| Tomamos a equação:<br>$$log(E) = 11{,}8 + 1{,}5M$$<br>Dado $M = 8{,}2$:<br>$$log(E) = 11{,}8 + 1{,}5 \times (8{,}2)$$<br>$$\log(E) = 24{,}1$$<br>Aplicamos a definição:<br>$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$<br>$$E = 10^{24{,}1}.$$ |

Fonte: Elaborado pelos autores.

De acordo com nossas observações, ao avançar na resolução, os alunos podem ser desafiados a usar manipulações matemáticas para resolver a equação de uma situação específica. A partir daqui, temos uma predominância no MOS, no qual inicialmente os estudantes simplificam a equação utilizando as operações de multiplicação e adição, respectivamente. Em seguida, é necessária a recordação de que $\log(E) = \log_{10}(E)$, isto é, que a base é 10 quando esta não é explicitamente indicada. Trata-se de uma convenção matemática, cuja notação precisa ser conhecida para a sua resolução.

No último passo da resolução, temos a aplicação da definição de logaritmo, em que permanece a concentração no MOS. Contudo, podemos supor a presença de traços do MFA, haja vista que o aluno pode estar buscando compreender ou se recordar das propriedades e demonstrações relacionadas à definição formal de logaritmo presente na literatura matemática.

Um aspecto interessante de observar é que o aluno não necessitava utilizar a definição de logaritmo formal, pois poderia recorrer a uma corporificação de aspectos simbólicos (interseção entre MCC e MOS) do que pode ser descrito da seguinte forma: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Dito de outra forma, a ação do $a$ passar para a base poderia

ser executada sem o estudante saber que essa é a definição de logaritmo.

A partir dessa análise, percebemos que essa questão representa a importância da Matemática quando associada a outras áreas do conhecimento, como a Geografia e a Física. Ademais, ela possibilita a passagem pelos três domínios apresentados pela TTMM, ainda que tenhamos identificado com maior permanência no MOS e breves passagens no MCC e no MFA. Embora a questão possibilite a passagem pelos três mundos, a efetivação da passagem dependerá de como o aluno abordará a questão.

Nesse ponto, refletimos sobre o conceito de "contextualização" no Ensino de Matemática, evidenciada no texto de Reis e Nehring (2017). Os autores destacam os desafios e ambiguidades associados ao termo, desde seu uso na escrita até sua "presença" nas práticas pedagógicas. Embora haja um consenso de que a contextualização é importante, Reis e Nehring (2017) mostram que sua interpretação e aplicação variam significativamente. Apesar dessa dissonância, os autores defendem que a contextualização deve ir além da simples aplicação da matemática em contextos do cotidiano, voltando-se para a construção de significados e conceitos matemáticos pelos alunos a partir de negociações atravessadas por uma rede de significados.

Frente às considerações de Reis e Nehring (2017), acreditamos que a questão 2018-37 apresenta uma contextualização capaz de tecer uma rede de significados entre os três mundos da matemática. Dessa forma, possibilita a presença dos logaritmos em um tema relevante e não deixa a questão ser reduzida a termos de símbolos matemáticos.

**Segundo grupo**

No segundo grupo, fazemos a análise de quatro questões, começando com as 2018-35 e 2020-41 que abrangem o uso da definição e aplicação das propriedades dos logaritmos. Ambas possuem análises próximas, pois consistem em encontrar um valor ou uma determinada representação por meio das propriedades dos logaritmos. Nesse conjunto, observamos que as questões têm pouco potencial de atingir o mundo corporificado tal como descrito por Tall (2013). Isso se deve à verificação de que a questão 2018-35 apresenta uma equação matemática (conjunto de símbolos matemáticos) e pede o valor de $x$ e a 2020-41 mostra o logaritmo de um valor e pede uma outra representação deste valor em termos de logaritmos.

**Figura 3:** Questão 35 do Vestibular UFRGS 2018

Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de $x$ é

(A) $\sqrt[3]{2}$.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) $\sqrt[3]{3}$.

(D) $\sqrt{3}$.

(E) $\sqrt[3]{9}$.

Fonte: COPERSE (2018, p. 15).

A questão 2018-35 não tem uma única forma de ser resolvida, pois outras propriedades além daquelas apresentadas no Quadro 3 poderiam ser utilizadas na sua resolução. No entanto, em qualquer um dos caminhos é exigido que o aluno relembre a definição do logaritmo e as propriedades a serem utilizadas. Percebemos ainda a presença de outros conhecimentos necessários, como as operações com frações, a passagem do resultado na forma de potência para a forma de raiz e a fatoração. Esta pode ser realizada nos termos comuns da soma $\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2}$ e pode ajudar o estudante a perceber a possibilidade de somar os termos que possuem o mesmo logaritmo $\log_3 x$.

**Figura 3:** Questão 41 do Vestibular UFRGS 2020

Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 288$ é

(A) $2x + 5y$.

(B) $5x + 2y$.

(C) $10xy$.

(D) $x^2 + y^2$.

(E) $x^2 - y^2$.

Fonte: COPERSE (2020, p. 18).

A questão 2020-41 pode ser iniciada com a fatoração do número 288 em termos dos números 2 e 3, seguida da aplicação das propriedades. Assim como na questão anterior, o aluno precisaria relembrar a definição e as propriedades, bem como ter conhecimento de como fatorar um número.

**Quadro 3:** Resoluções das questões 35 do Vestibular UFRGS 2018 e 41 do 2020

| **Resolução da 2018-35 – Gabarito: E** | **Resolução da 2020-41 – Gabarito: B** |
|---|---|
| Tomamos a equação:<br>$\log_3 x + \log_9 x = 1$<br>Aplicamos a propriedade da mudança de base:<br>$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$<br>$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = 1$<br>Resolvemos o $\log_3 9$:<br>$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 1$<br>Evidenciamos $\log_3 x$:<br>$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \log_3 x \left(\frac{3}{2}\right) = 1$<br>$\log_3 x = \frac{2}{3}$<br>Aplicamos a definição:<br>$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$<br>$x = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9}.$ | Tomamos a fatoração de 288:<br>$2^5 \times 3^2$<br>Reescrevemos $\log 288$ como:<br>$\log 288 = \log(2^5 \times 3^2)$<br>Aplicamos a propriedade do logaritmo do produto:<br>$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$<br>$\log(2^5 \times 3^2) = \log 2^5 + \log 3^2$<br>Aplicamos a propriedade do logaritmo da potência:<br>$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$<br>$\log 2^5 + \log 3^2 = 5 \times \log 2 + 2 \times \log 3$<br>Substituímos $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$:<br>$5 \times \log 2 + 2 \times \log 3 = 5x + 2y$<br>Assim:<br>$\log 288 = 5x + 2y.$ |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao que tudo indica, as duas questões podem fazer com que o estudante se concentre no MOS. Caso o aluno deduzisse as propriedades ou buscasse entender as estruturas formais dessas propriedades ou da definição, ele estaria evocando ações do MFA.

Ainda nesse grupo, partimos para as análises das questões 2019-34 e 2022-46. As duas tratam de somas sucessivas de logaritmos, como mostrado a seguir:

**Figura 4:** Questão 34 do Vestibular UFRGS 2019

O valor de

$$E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \log\left(\frac{999}{1000}\right)$$ é

(A) $-3$.
(B) $-2$.
(C) $-1$.
(D) $0$.
(E) $1$.

Fonte: COPERSE (2019, p. 15).

**Figura 5:** Questão 46 do Vestibular UFRGS 2022

O valor de

$$log\left(1-\frac{1}{2}\right) + log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \cdots + log\left(1-\frac{1}{1000}\right)$$

é

(A) -3.
(B) -2.
(C) -1.
(D) 0.
(E) 1.

Fonte: COPERSE (2022, p. 25).

Ambas exigem que se opere com os logaritmandos no início das suas resoluções. Contudo, optamos por apresentar a resolução apenas da questão 2022-46, haja vista que, após o primeiro passo do seu desenvolvimento, curiosamente chegamos na mesma expressão disposta em 2019-34. A partir dessa etapa, as duas apresentam resoluções similares.

Na questão 2022-46, é importante que o aluno realize as operações dentro dos logaritmandos e prossiga com a aplicação da propriedade do logaritmo do produto na

simplificação da expressão. Com relação ao MCC, observamos novamente o pouco potencial dessas questões, pois ambas se concentram em apenas aplicar as propriedades na simplificação de um determinado conjunto de valores para encontrar um valor correspondente à solução.

**Quadro 4:** Resoluções das questões 34 do Vestibular UFRGS 2019 e 46 do 2022.

| **Resolução da 2022-46 – Gabarito: A** |
|---|
| Chamemos de $E$ o valor da sequência de termos:<br>$E = \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$<br>Realizamos as operações dentro dos logaritmos:<br>$E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{999}{1000}\right)$<br>Aplicamos sucessivamente a propriedade do logaritmo do produto:<br>$E = \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{999}{1000}\right)$<br>Fazemos as devidas simplificações:<br>$E = \log\left(\frac{1}{1000}\right)$<br>Aplicamos a definição:<br>$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$<br>$10^E = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 10^E = 10^{-3} \Leftrightarrow E = -3.$ |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Diante dessa resolução, evidencia-se a proximidade das quatro questões do grupo dois. Embora as duas questões analisadas no Quadro 4 exigissem que o aluno percebesse a sucessão dos logaritmos e encontrasse algum padrão ou forma de simplificação, também demandaram as mesmas operações explicitadas no Quadro 3.

Com isso, concluímos que as quatro questões podem ter pouco potencial para os alunos quando se trata do pensamento matemático no MCC. Demonstraram ter um leve potencial positivo quando se trata do MFA, visto que o aluno só evocará conceitos deste mundo quando estiver buscando deduzir, demonstrar ou ainda compreender as estruturas

lógicas que sustentam a definição ou as propriedades dos logaritmos. Por fim, constatamos que são muitas as forças que podem levar o aluno a se concentrar no MOS durante as resoluções desse conjunto. Isso porque acreditamos haver um maior apelo para que se conheça/memorize a definição de logaritmo e suas propriedades, pois é a forma mais rápida de manipulação das expressões matemáticas que exijam esses artifícios.

**Terceiro grupo**

Em nosso último grupo, fazemos a análise de quatro questões. Começamos com as 2019-31 e 2022-49 que exigem manipulações de equações e funções quadráticas e o uso da definição de logaritmo.

A questão 2019-31, na Figura 6, começa com algumas possibilidades de caminhos nos MCC e MOS. Dizemos isso porque o aluno pode observar e criar imagens a respeito do comportamento das funções (logarítmica e quadrática), desenhando ou recordando o formato dos gráficos. Isso é especialmente útil nessa questão, pois compreender o significado das funções e como elas se comportam em diferentes intervalos é crucial para a sua resolução. Envolve entender o que significa quando igualamos duas funções para encontrar onde os gráficos se encontram e interpretar em quais intervalos isso ocorre.

**Figura 6:** Questão 31 do Vestibular UFRGS 2019

Dadas as funções reais de variável real $f$ e $g$, definidas por $f(x) = -\log_2(x)$ e $g(x) = x^2 - 4$, pode-se afirmar que $f(x) = g(x)$ é verdadeiro para um valor de $x$ localizado no intervalo

(A) $[0; 1]$.
(B) $[1; 2]$.
(C) $[2; 3]$.
(D) $[3; 4]$.
(E) $[4; 5]$.

Fonte: COPERSE (2019, p. 14).

O(s) ponto(s) onde $f(x) = g(x)$ são também chamados de *pontos de intersecção* dessas funções, isto é, pontos em que os gráficos das duas funções se cruzam no plano

cartesiano. Dito de outra forma, é quando os valores das imagens de ambas as funções são iguais para um mesmo valor do domínio.

Uma possibilidade de resolução encontra-se no Quadro 5. O aluno poderia resolver a questão substituindo os valores das variáveis nas funções e construindo o gráfico. Assim, verificaria que as soluções estão contidas no intervalo $1 \leq x \leq 2$.

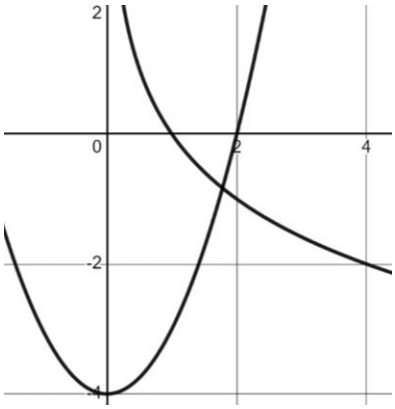
**Quadro 5:** Resolução da questão 31 do Vestibular UFRGS 2019

**Resolução da 2019-31 – Gabarito: B**

Tomamos as funções:

$f(x) = -\log_2 x$ e $g(x) = x^2 - 4$

Desenhamos os gráficos das funções:




Substituímos os valores inteiros de $x \in [1,5]$ nas funções $f(x)$ e $g(x)$:

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{f(1) = 0}$ | $\boldsymbol{g(1) = -3}$ |
| $\boldsymbol{f(2) = -1}$ | $\boldsymbol{g(2) = 0}$ |
| $f(3) = -\log_2 3$ | $g(3) = 5$ |
| $f(4) = -2$ | $g(4) = 12$ |
| $f(5) = -\log_2 5$ | $g(5) = 21$ |

Observando que em $x = 1$ temos $f(1) > g(1)$ e em $x = 2$ temos $f(2) < g(2)$, podemos afirmar sem fazer o gráfico que houve uma intersecção em $x \in [1,2]$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Outra maneira seria perceber, inicialmente de forma intuitiva, que o cruzamento e consequente valor igual (ponto de intersecção) das funções no intervalo $x \in [1,2]$. O

primeiro indício seria a verificação de que em $x = 1$, tendo $f(1) = 0$ e $g(1) = -3$, chega-se na desigualdade $f(1) > g(1)$. Analogamente, em $x = 2$, tendo $f(2) = -1$ e $g(2) = 0$, encontra-se que $f(2) < g(2)$. Esse segundo modo poderia ser conjecturado com ou sem o auxílio do gráfico.

Há ainda outros elementos que poderiam auxiliar o aluno na resolução. Por exemplo, seria útil observar que as funções quadráticas do tipo $ax^2 + c$ – como $g(x)$ – são simétricas em relação ao eixo $x$ (eixo das abscissas) e crescentes a partir de $x = 0$. Apontamentos semelhantes podem ser feitos acerca da função logarítmica representada $f(x)$, cujo gráfico é sempre decrescente e intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 1$. Dessa forma, vê-se que, do início ao fim da questão, há uma predominância na possibilidade de evocação de conceitos nos MCC e MOS – inclusive a interseção entre esses dois mundos. Estas noções podem ser acompanhadas dos aspectos do MFA caso o aluno busque compreender propriedades formais das funções, por exemplo.

**Figura 7** – Questão 49 do Vestibular UFRGS 2022

Se $\log_2 x + (\log_2 x)^2 = 12$, então o valor de $x$ é

(A) $8$ ou $\frac{1}{16}$.

(B) $\frac{1}{8}$ ou $16$.

(C) $-4$ ou $3$.

(D) $4$ ou $-3$.

(E) $2^{12}$.

Fonte: COPERSE (2022, p. 26).

A questão 2022-49 (Figura 7) apresenta características semelhantes às questões do grupo do segundo grupo, pois consiste em encontrar a solução de uma equação logarítmica. No entanto, o artifício exigido nesse caso é o da substituição dos logaritmos por uma variável, o que resulta em uma equação quadrática. Com relação ao MCC, a questão pode ter baixo potencial de alcance no aluno, dado que sua resolução pode ser realizada somente mediante o uso de símbolos e notações matemáticas convencionais. É o que se evidencia

no Quadro 6.

**Quadro 6:** Resolução da questão 49 do Vestibular UFRGS 2022

| **Resolução da 2022-49 – Gabarito: A** |
|---|
| Tomamos a equação:<br>$$\log_2 x + (\log_2 x)^2 = 12$$<br>Chamemos uma variável $y = \log_2 x$:<br>$$y + y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$<br>Resolvemos a equação quadrática:<br>$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$<br>$$y_1 = -4 \quad \text{e} \quad y_2 = 3$$<br>Aplicamos a definição e encontramos $y = \log_2 x$:<br>$$-4 = \log_2 x \Leftrightarrow x_1 = 2^{-4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{16}$$<br>$$3 = \log_2 x \Leftrightarrow x_2 = 2^3 \Leftrightarrow x_2 = 8$$ |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Espera-se que o aluno associe a possibilidade de transformação da equação logarítmica em uma equação quadrática para, em seguida, seja aplicada a definição de logaritmo para a obtenção dos valores de $x$ correspondentes à solução almejada. Acreditamos que essa questão demonstra a necessária e importante aplicação prática de outros conteúdos matemáticos dentro de questões envolvendo os logaritmos – como a equação do segundo grau. São essas aplicações que ilustram a potência das ferramentas matemáticas na resolução de problemas mais complexos.

Na sequência, temos a análise das últimas duas questões.

A questão 2023-50 exige conhecimento das propriedades dos logaritmos e da soma dos termos de uma progressão aritmética. Exceto pela presença de uma soma de valores características desse tipo de progressão, as percepções com relação às propriedades dos logaritmos nessa questão são muito semelhantes às das 2019-34 e 2022-46 do segundo grupo.

Figura 8 – Questão 50 do Vestibular UFRGS 2023

O valor de $log\ 2^2 + log\ 2^3 + log\ 2^4 + \cdots + log\ 2^{50}$ é

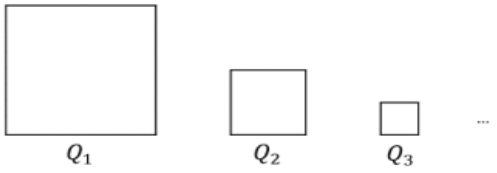
(A) $log\ 2^{1247}$.
(B) $log\ 2^{1274}$.
(C) $log\ 2^{1472}$.
(D) $log\ 2^{59}$.
(E) $log\ 8^{59}$.

Fonte: COPERSE (2023, p. 33).

Quando aplicamos as propriedades dos logaritmos (Quadro 7), percebemos que a expressão pode ser simplificada para $\log(2^{2+3+4+\cdots+50})$. É possível calcular a soma $2 + 3 + 4 + \cdots + 50$ sem perceber que se trata de uma progressão aritmética (P.A.) ou sem recorrer à fórmula da soma de uma P.A., não sendo estritamente necessário usar as fórmulas de P.A., embora o processo se torne mais trabalhoso dessa forma.

**Figura 9:** Questão 50 do Vestibular UFRGS 2024

A figura abaixo mostra o início de uma sequência infinita de quadrados. A medida dos lados dos quadrados $Q_1$ , $Q_2$ e $Q_3$ são, respectivamente, $log\ (2)$ , $log\ (\sqrt{2})$ e $log\ (\sqrt[4]{2})$.




A soma das áreas dessa sequência infinita de quadrados é

(A) $\frac{1}{3} \cdot [\ log\ (2)]^2$.

(B) $\frac{4}{3} \cdot [\ log\ (2)]^2$.

(C) $\frac{2}{3} \cdot [\ log\ (2)]^2$.

(D) $log\ (2 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2})$.

(E) $log\ (2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2})$.

Fonte: COPERSE (2024, p. 34).

A questão 2024-50 exige um domínio das propriedades dos logaritmos,

determinação das áreas de figuras planas – nesse caso, um quadrado – e cálculo da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica. Após a aplicação das propriedades da potência, o aluno deve encontrar a área dos quadrados com base nos valores dos lados.

**Quadro 7:** Resoluções das questões 50 do Vestibular UFRGS 2023 e 50 do 2024

| **Resolução da 2023-50 – Gabarito: B** | **Resolução da 2024-50 – Gabarito: B** |
|---|---|
| Tomamos a expressão:<br>$\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \cdots + \log 2^{50}$<br>Aplicamos sucessivamente a propriedade do logaritmo do produto:<br>$\log(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{50})$<br>Unimos os expoentes na mesma base:<br>$\log(2^{2+3+4+\cdots+50})$<br>Aplicamos a fórmula da soma de uma progressão aritmética (P.A.):<br>$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2+50) \cdot 49}{2}$<br>$S = 1274$<br>Substituímos no logaritmo:<br>$\log 2^{1274}$. | Tomamos a sequência (medida dos lados):<br>$\log 2 + \log \sqrt{2} + \log \sqrt[4]{2} + \cdots$<br>$\log 2 + \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 2^{\frac{1}{4}} + \cdots$<br>Aplicamos a propriedade do logaritmo da potência:<br>$\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2 + \cdots$<br>Para a área desses quadrados, teremos:<br>$(\log 2)^2 + \left(\frac{1}{2}\log 2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\log 2\right)^2 + \cdots$<br>$(\log 2)^2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 + \frac{1}{16}(\log 2)^2 + \cdots$<br>$(\log 2)^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$<br>Aplicamos a fórmula da soma infinita de uma progressão geométrica (P.G.):<br>$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$<br>Assim, teremos:<br>$S_{\text{áreas}} = \frac{4}{3}(\log 2)^2$. |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para o MCC, a questão 2024-50 tem alto potencial, pois o aluno, mesmo que não soubesse como resolvê-la, poderia criar e manipular imagens mentais dos infinitos quadrados e ter um entendimento mais geral da questão. Sua resolução, assim como as

outras, pode concentrar-se no MOS, podendo passar pelo MFA.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que nosso objetivo foi atingido, uma vez que a análise das nove questões do Vestibular UFRGS (2018-2024), sob a perspectiva da TTMM, permitiu identificar quais as dimensões do pensamento matemático que podem ser exploradas em cada questão.

Verificamos que há possibilidade de os alunos alcançarem os Três Mundos da Matemática, com destaque ao MOS, além de perpassar os variados fluxos do pensamento matemático entre esse mundo e os outros dois. Ao analisarmos as nove questões que fizeram parte do material empírico, verificamos que seu potencial quanto às dimensões do pensamento matemático em alunos estaria predominante nos fluxos de pensamento relacionados ao MOS. Em alguns casos, evidenciamos a aproximação com o MCC, sendo mais raras as passagens pelo MFA.

Ao que parece, a ênfase das questões encontra-se na ideia de o aluno aplicar os conhecimentos específicos de matemática na resolução de equações. Essa tendência exige repetidas manipulações de equações logarítmicas, aplicações das propriedades dos logaritmos e mobilizações de conhecimentos sobre alguns outros objetos matemáticos. Consideramos que o estudante, além de adquirir conhecimentos teóricos e resolver exercícios, deve também saber aplicá-los em problemas que exijam um pensamento matemático mais complexo e específico.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço a professora Elisabete Zardo Búrigo pelo acolhimento, discussões e sugestões durante a realização deste trabalho na disciplina MEM 203 – Currículo e Educação Matemática ofertada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Agradeço ao professor Fernando Henrique Fogaça Carneiro, professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela revisão e adequação do trabalho nas devidas normas.

## REFERÊNCIAS

BORBA, M. A pesquisa qualitativa em educação matemática. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu. **Anais [...]**. ANPEd: Caxambu, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2018**: História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2018. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/04/HIS-MAT-1.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2019**: História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2019. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/04/HIS-MAT.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2020**: História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/03/4o-DIA-PROVA.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2022**: Língua Portuguesa, Redação, Literatura (em língua portuguesa), História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/03/PROVAS-1o-DIA.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2023**: Língua Portuguesa, Redação, Literatura (em língua portuguesa), História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2023. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2023/03/CV-23-CADERNO-1o-DIA.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

COPERSE. Comissão Permanente de Seleção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. **Vestibular 2024**: Língua Portuguesa, Redação, Literatura (em língua portuguesa), História e Matemática. Porto Alegre: COPERSE, 2024. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2023/12/1o-DIA-PROVA-2024.pdf. Acesso em: 23 abr. 2025.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. Revisão técnica de Dirceu da Silva. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

PADILHA, G. R. Linguagem Matemática, a teoria dos Três Mundos da Matemática e a regra da cadeia: possíveis relações. **Revista Paranaense de Educação Matemática**,

Curitiba, v. 13, n. 31, p. 1-19, 2024. DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2024.13.31.8846.

PADILHA, G. R.; ARAUJO, V. L. S. Análise de questões de processos seletivos: implicações ao currículo. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS, 7.; SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS, 1., 2024, São José do Rio Preto. **Anais [...]**. UNESP: São José do Rio Preto, 2024. Disponível em: www.even3.com.br/anais/vii-congresso-brasileiro-de-ensino-e-processos-formativos-i-simposio-internacional-de-ensino-e-processos-formativos-434578. Acesso em: 22 abr. 2025.

REIS, A. Q.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, 2017. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p339-364.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

UFRGS. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Comissão Permanente de Seleção. **Manual do candidato**. Porto Alegre: UFRGS, 2023. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/10/Manual-do-Candidato-CV-2023.pdf. Acesso em: 20 jan. 2024.