REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v10i2.22055

TANGÊNCIA ENTRE CÔNICAS VIA AUTOESPAÇOS DE MATRIZES

TANGENCY BETWEEN CONICS VIA EIGENSPACES OF MATRICES

Wállace Mangueira de Sousa
Universidade Federal da Paraíba
wallace.mangueira@academico.ufpb.br

Comunicado por Z. Ramos

Resumo

As relações de tangência entre retas e cônicas e entre duas cônicas são objetos de estudos de matemáticos desde a antiguidade. Neste trabalho, mostramos que a relação de tangência entre duas cônicas pode ser determinada através do estudo dos autoespaços de uma matriz.

Palavras-chaves: dualidade; cônicas; tangência.

Abstract

The tangency relations between lines and conics, as well as between two conics, have been studied by mathematicians since antiquity. In this work, we show that the tangency relation between two conics can be determined through the study of the eigenspaces of a matrix.

Keywords: duality; conics; tangency.

Introdução

Durante o período conhecido como a "Idade de Ouro" da Matemática Grega (cerca de 300 a 200 a.C.), Apolônio de Perga propôs e resolveu um problema que viria a ser nomeado em sua homenagem: *Dados três objetos, que podem ser um ponto, uma reta ou um círculo, construir um círculo que passe por cada ponto e seja tangente às retas e círculos dados* [3]. Cabe ressaltar que os objetos geométricos mencionados nesse problema são subconjuntos do plano real $\mathbb{R}^2$.

Desde então, muitos matemáticos têm se dedicado a buscar soluções variadas para o fascinante problema de Apolônio e suas possíveis generalizações. No plano projetivo

This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

complexo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, as retas e cônicas, assim como as relações de tangência entre esses objetos, assumem novas propriedades e contextos algébricos. Por exemplo, embora não seja possível construir ou desenhar os objetos que satisfaçam o problema de Apolônio ou suas generalizações, é viável determinar o número desses objetos [4].

Existem métodos elementares para identificar quando duas cônicas são tangentes, como o estudo do determinante de uma matriz que depende dos polinômios que definem tais cônicas [1]. Contudo, esses métodos não indicam os pontos específicos de tangência. Neste artigo, apresentamos uma abordagem aparentemente nova para determinar os pontos de tangência entre duas cônicas, utilizando o estudo dos autoespaços de uma matriz.

Mais precisamente, considere duas cônicas suaves C_1 e C_2, um ponto $P \in C_1 \cap C_2$, e as matrizes M_{C_1} e M_{C_2} associadas a C_1 e C_2, respectivamente. Neste contexto, o ponto $P = [p_0 : p_1 : p_2]$ é um ponto de tangência entre C_1 e C_2 se, e somente se, $\vec{u} = (p_0, p_1, p_2)$ é um autovetor de $(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}$ (veja Teorema 2.27).

Antes de provar o resultado mencionado no parágrafo anterior, mostraremos que existe uma correspondência biunívuca entre cônicas projetivas planas e o conjunto das matrizes simétricas não nulas, módulo ação (canônica) de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Essa correspondência permite interpretar propriedades geométricas das cônicas a partir de características algébricas das matrizes associadas.

Além disso, introduzimos a noção de dualidade de certos subconjuntos algébricos do plano projetivo, incluindo o plano projetivo dual, a reta dual de um ponto e a cônica dual. Esses objetos desempenham um papel central na abordagem adotada neste artigo, pois permitem uma formulação mais estruturada das condições de tangência entre cônicas. Em particular, exploramos suas propriedades para estabelecer a demonstração do Teorema 2.27, destacando como a análise matricial desses elementos fornece uma nova perspectiva sobre o problema.

Para uma melhor compreensão do artigo, recomendamos que o leitor esteja familiarizado com os seguintes conceitos:

- Posto, inversa e adjunta de uma matriz, bem como autovalores e autoespaços [2];
- Espaço projetivo complexo e subconjuntos algébricos projetivos ([5] e [7]).

Organização do artigo. Na primeira seção, revisitaremos resultados clássicos sobre retas e cônicas projetivas, estabelecendo sua conexão com matrizes. Exploraremos como propriedades geométricas das cônicas podem ser interpretadas em termos das propriedades algébricas das matrizes associadas. Na segunda seção, introduziremos o conceito de dualidade para certos subconjuntos algébricos do plano projetivo e, por fim, demonstraremos que a relação de tangência entre duas cônicas pode ser analisada por meio dos autoespaços de uma matriz específica.

1 Retas, Cônicas e Matrizes

Neste seção relembramos alguns conceitos importantes como reta, cônica e círculo no plano projetivo (complexo) e, por fim, vemos as relações das cônicas com as matrizes quadradas de ordem 3 e seus respectivos autoespaços e postos.

1.1 Retas e cônicas

Considere $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o plano projetivo complexo. Uma *reta* $r \subset \mathbb{P}^2$ é o conjunto dos zeros de

$$L(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2],$$

um polinômio homogêneo de grau 1 (fator linear), ou seja,

$$r = Z(L) := \left\{ [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2;\ L(a_0, a_1, a_2) = 0 \right\}.$$

Uma *cônica* $C \subset \mathbb{P}^2$ é o conjunto dos zeros de

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2],$$

um polinômio homogêneo de grau 2. Dizemos que a cônica C é *degenerada* quando $F = L_1 \cdot L_2$, onde L_1 e L_2 são polinômios homogêneos de grau 1. Quando F é irredutível, ou seja, quando F não pode ser escrito como produto de polinômios homogêneos de grau 1, então dizemos que C é *não degenerada*.

Exemplo 1.1. Notemos que $Z(x_0^2)$ e $Z(x_0^2 + x_1^2)$ são cônicas degeneradas, enquanto que $Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ é uma cônica não degenerada. A primeira é um exemplo de *reta dupla* enquanto que a segunda, é um exemplo de *retas cruzadas* (veja Definição 1.8).

Exemplo 1.2. Sabemos que se $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ é um polinômio homogêneo que depende apenas de duas variáveis, então F pode ser escrito como produto de fatores lineares (veja [5]). Desta forma, se $C = Z(F)$ é uma cônica tal que $F(x_0, x_1, x_2)$ depende apenas de duas variáveis, então C é degenerada.

Observação 1.3. Considere $F(x_0, x_1, x_2), G(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ dois polinômios homogêneos definidos por $F(x_0, x_1, x_2) = (x_0 - x_1)^2(x_0 - x_1 + x_2)$ e $G(x_0, x_1, x_2) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_1 + x_2)^2$. Notemos que F e G têm grau 3 e $Z(F) = Z(G)$. Porém F não é um múltiplo escalar de G. O próximo resultado garante que se dois polinômios homogêneos têm o mesmo grau $d \in \{1, 2\}$ e mesmo conjunto de zeros, então um destes polinômios é um múltiplo escalar do outro.

Proposição 1.4. Sejam $F(x_0, x_1, x_2)$ e $G(x_0, x_1, x_2)$ dois polinômios homogêneos de mesmo grau $d \in \{1, 2\}$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo tal que

$$F(x_0, x_1, x_2) = \lambda G(x_0, x_1, x_2)$$

se, e somente se, $Z(F) = Z(G)$.

Demonstração. Provaremos apenas o seguinte caso: se $d = 2$ e $Z(F) = Z(G)$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo tal que $F(x_0, x_1, x_2) = \lambda G(x_0, x_1, x_2)$.

Suponhamos que $F = L_1 \cdot L_2$, onde L_1 e L_2 são fatores lineares. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (veja [5]), existe um inteiro $d > 0$ tal que G^d é um elemento do ideal gerado por F. Logo, $L_1 \cdot L_2$ deve aparecer na decomposição de G num produto de fatores irredutíveis. Suponhamos que $G = L_1^{e_1} \cdot L_2^{e_2} \cdot H$, onde $e_1, e_2 \geq 1$ e $H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Como o grau de G é 2, segue que $e_1 = e_2 = 1$ e H é constante. Portanto, $G = \lambda \cdot F$ para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. De maneira análoga, prova-se o caso em que F é irredutível. □

Definição 1.5. Seja $C = Z(F)$ uma cônica. Dizemos que $P \in C$ é um ponto *singular* se

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(P) = 0.$$

Caso contrário, dizemos que $P \in C$ é *não singular*. Se $P \in C$ é um ponto não singular, então a *reta tangente* a C no ponto P, denotada por $r_P C$, é definida como o conjunto dos zeros de

$$L_P C(x_0, x_1, x_2) := \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) \cdot x_2.$$

Se todo ponto de C é não singular, então dizemos que C é *não singular* (suave).

Observação 1.6. Seja $F(x_0, x_1, x_2)$ um polinômio homogêneo de grau 2. Pelo Teorema de Euler (veja [5]), segue que

$$2F = \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i.$$

Assim, se $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in C = Z(F)$ é um ponto não singular, então

$$0 = 2F(P) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \cdot p_i = L_P(C)(P).$$

Portanto, temos que $P \in r_P C$.

Proposição 1.7. Seja C uma cônica não degenerada. Então C é uma cônica suave.

Demonstração. Suponhamos que existe $P \in C$ um ponto singular. A menos de mudança de coordenadas projetivas, podemos supor que $P = [0 : 0 : 1]$. Considere $C = Z(F)$, onde $F(x_0, x_1, x_2) := ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$. Primeiramente, notemos que:

- $\partial F/\partial x_0(P) = 0$, implica que $d = 0$;
- $\partial F/\partial x_1(P) = 0$, implica que $e = 0$;
- $\partial F/\partial x_2(P) = 0$, implica que $f = 0$.

Desta forma, temos que $F(x_0, x_1, x_2)$ é um polinômio homogêneo que depende apenas das variáveis x_0 e x_1. Portanto, o polinômio $F(x_0, x_1, x_2)$ pode ser escrito como produto de dois fatores lineares (veja Exemplo 1.2), o que é uma contradição. □

Definição 1.8. Seja $C = Z(F)$ uma cônica degenerada. Dizemos que C é um par de *retas cruzadas* se $F = L_1 \cdot L_2$, onde L_1, L_2 são fatores lineares e $Z(L_1) \neq Z(L_2)$. Dizemos que C é uma *reta dupla* se $F = L^2$, onde L é uma fator linear.

Observação 1.9. Sejam $L_i = a_{0i}x_0 + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2$ polinômios homogêneos de grau 1, para $i = 1, 2$. Notemos que as retas $Z(L_1)$ e $Z(L_2)$ são diferentes se, e somente se, o conjunto de vetores $\{(a_{01}, a_{11}, a_{21}), (a_{02}, a_{12}, a_{22})\} \subset \mathbb{C}^3$ é linearmente independente.

Lema 1.10. *Seja C uma cônica degenerada. Se C é um par de retas cruzadas, então existe um único ponto singular $P \in C$. Se C for uma reta dupla, então todo ponto $P \in C$ é singular.*

Demonstração. Suponhamos que $C = Z(L_1 \cdot L_2)$ é um par de retas cruzadas, onde L_1 e L_2 são dois polinômios homogêneos de grau 1. Primeiramente, notemos que $r_1 := Z(L_1)$ e $r_2 := Z(L_2)$ se intersectam num único ponto, digamos $P \in r_1 \cap r_2$. Vamos mostrar que P é o único ponto singular de C. Primeiramente, notemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \cdot L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial x_i} \cdot L_1, \forall i = 0, 1, 2 \implies \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0, \forall i = 0, 1, 2.$$

Portanto, P é um ponto singular. Por outro lado, suponhamos que $Q \in C$ é tal que $Q \notin r_j$, para algum $j = 1, 2$. Digamos que $Q \notin r_1$ e, consequentemente, $Q \in r_2$. Como $L_2 := ax_0 + bx_1 + cx_2$ é não nulo, suponhamos que $a \neq 0$. Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) \neq 0,$$

ou seja, $Q \in C$ é não singular. Por fim, suponhamos que $C = Z(L^2)$. Logo,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2\frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot L, \forall i = 0, 1, 2.$$

Assim, dado $P \in C$, uma vez que $L(P) = 0$, concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2.$$

Portanto, todo ponto de C é singular. □

Proposição 1.11. Um cônica C é degenerada se, e somente se, existe $P \in C$ ponto singular.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.7 e do Lema 1.10. □

Definição 1.12. Um *círculo* é uma cônica $C \subset \mathbb{P}^2$ que passa pelos pontos $P_1 := [1 : i : 0]$ e $P_2 := [1 : -i : 0]$, ou seja, é uma cônica da forma $C = Z(F)$, onde F é um polinômio homogêneo de grau 2, cumprindo as igualdades $F(P_1) = 0$ e $F(P_2) = 0$.

Proposição 1.13. O espaço $\mathbb{P}^3$ *parametriza* os círculos em $\mathbb{P}^2$, ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{P}^3$ e o conjunto dos círculos em $\mathbb{P}^2$.

Demonstração. Seja $C = Z(F)$ uma cônica, onde

$$F(x_0, x_1, x_2) := ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2.$$

Assim, C é um círculo se, e somente se, $F(1, i, 0) = 0$ e $F(1, -i, 0) = 0$. Desta forma, podemos concluir que os coeficientes de F devem satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + ib - c &= 0 \\ a - ib - c &= 0 \end{cases}.$$

Logo, temos que $b = 0$ e $a = c$. Portanto, os círculos são o conjunto dos zeros de polinômios homogêneos de grau 2 da seguinte forma

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + ax_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2. \tag{1.1}$$

Como um múltiplo escalar da Equação (1.1) não altera o círculo definido por F, então podemos associar o círculo C com o ponto $[a : d : e : f] \in \mathbb{P}^3$. Esta associação está bem definida (pela Proposição 1.4) e é uma bijeção. □

Observação 1.14. Notemos que a homogeneização de $H(x_0, x_1) = (x_0-\alpha)^2+(x_1-\beta)^2-r^2$ (com relação a variável x_2) determina um cículo em $\mathbb{P}^2$, onde $\alpha, \beta, r \in \mathbb{C}$.

1.2 Matrizes

Notemos que para cada cônica $C = Z(ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2)$ podemos associar uma matriz (simétrica)

$$M_C := \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

tal que se $[\underline{x}]^T := \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, então o polinômio cujo conjunto dos zeros determina C é dado por

$$F(x_0, x_1, x_2) = [\underline{x}]^T \cdot M_C \cdot [\underline{x}].$$

Mais ainda, considere $S(3, \mathbb{C})$ o conjunto das *matrizes simétricas* de ordem 3 com entradas em $\mathbb{C}$ munido com a seguinte relação de equivalência: sejam $A, B \in S(3, \mathbb{C})$, então

$$A \sim B \iff A = \lambda B, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Denotemos a matriz nula de $S(3, \mathbb{C})$ por $\underline{0}$ e o conjunto quociente $\big(S(3, \mathbb{C}) \setminus \{\underline{0}\}\big)/\sim$ por $\big(S(3, \mathbb{C}) \setminus \{\underline{0}\}\big)/\mathbb{C}^*$. Desta forma, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.15. O conjunto $\big(S(3, \mathbb{C}) \setminus \{\underline{0}\}\big)/\mathbb{C}^*$ parametriza as cônicas em $\mathbb{P}^2$.

Demonstração. Seja $C = Z(F(x_0, x_1, x_2))$ uma cônica, onde $F(x_0, x_1, x_2)$ é um polinômio homogêneo de grau 2. Como $Z(F(x_0, x_1, x_2)) = Z(\lambda F(x_0, x_1, x_2))$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, segue que o seguinte mapa

$$\begin{aligned} \{\text{Cônicas em } \mathbb{P}^2\} &\to \big(S(3, \mathbb{C}) \setminus \{\underline{0}\}\big)/\mathbb{C}^* \\ C &\mapsto \overline{M_C} \end{aligned}$$

está bem definido (veja Proposição 1.4), é injetor e sobrejetor. □

Observação 1.16. Para cada ponto $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2$, considere $[P]$ a *matriz coluna induzida* por (aquele representante de) P, ou seja, considere $[P]^T := \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{bmatrix}$. Desta forma, podemos dizer que $P \in C$ se, e somente se, $[P]^T \cdot M_C \cdot [P] = 0$ (e esta afirmação independe da escolha do representante de P).

Proposição 1.17. Sejam C uma cônica e M_C a matriz associada a C. Um ponto $P \in C$ é singular se, e somente se, $[P]^T \cdot M_C$ é a matriz nula. Mais ainda, se $P \in C$ é não singular, então $([P]^T \cdot M_C) \cdot [\underline{x}]$ determina a reta tangente a C em P.

Demonstração. Basta notar que se c_0, c_1 e c_2 são as colunas da matriz $[P]^T \cdot M_C$, então $\partial F/\partial x_i(P) = 2c_i$, para todo $i = 0, 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned} P \text{ é singular} &\iff \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0,\ \forall i = 0,1,2 \iff c_i = 0,\ \forall i = 0,1,2 \\ &\iff [P]^T \cdot M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $P \in C$ é não singular, então

$$Z\big(([P]^T \cdot M_C) \cdot [\underline{x}]\big) = Z(L_P C) = r_P C,$$

como gostaríamos. □

Teorema 1.18. *Uma cônica $C \subset \mathbb{P}^2$ é não degenerada se, e somente se, M_C é invertível.*

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} C \text{ é degenerada} &\iff \exists P \in C \text{ singular} \quad \text{(pela Proposição 1.11)} \\ &\iff [P]^T \cdot M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P \in C \text{ (pela Observação 1.16} \\ &\qquad \text{e Proposição 1.17)} \\ &\iff p_0c_0 + p_1c_1 + p_2c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } c_i \text{ são as colunas de } M_C \\ &\qquad \text{e } P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2 \\ &\iff M_C \text{ tem posto menor do que 3} \\ &\iff M_C \text{ não é invertível,} \end{aligned}$$

como gostaríamos. □

Colorário 1.19. Considere $S_I(3, \mathbb{C}) \subset S(3, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes simétricas, invertíveis e de ordem 3, com entradas em $\mathbb{C}$. As cônicas não degeneradas são parametrizadas por $S_I(3, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

Colorário 1.20. Seja F um polinômio homogêneo de grau 2. Assim, F é irredutível se, e somente se, a matriz M_C (associada a curva $C = Z(F)$) é invertível.

Colorário 1.21. Sejam C uma cônica não degenerada, $P \in C$ e $r_P C$ a reta tangente a C em P. Segue que $r_P C \cap C = \{P\}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $P \in r_P C \cap C$ (pela Observação 1.6). Por outro lado, se existisse $Q \in r_P C \cap C$ com $P \neq Q$, então $[P]^T \cdot M_C \cdot [Q] = 0$ e, portanto, $[Q]^T \cdot M_C \cdot [P] = 0$. Ou seja, $r_P C$ e $r_Q C$ passam por P e Q. Logo, $r_P C = r_Q C$. Isto implica que $[P]^T \cdot M_C = \lambda \cdot [Q]^T \cdot M_C$ para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e, consequentemente, $P = Q$ (visto que M_C é invertível), o que é uma contradição. □

Colorário 1.22. Seja C uma cônica degenerada. Assim, $\vec{u} = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{C}^3$ é um autovetor (não nulo) associado ao autovalor $0 \in \mathbb{C}$ de M_C se, e somente se, o ponto $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in C$ é singular.

Demonstração. Primeiramente, notemos que como M_C tem posto menor do que 3, então ela tem pelo menos um autovalor igual a 0. Por outro lado, considere $[\vec{u}]$ a matriz coluna associada ao vetor $\vec{u} = (p_0, p_1, p_2)$, ou seja, $[\vec{u}]^T := \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{bmatrix}$. Assim, temos que

$$[P]^T \cdot M_C = (M_C \cdot [\vec{u}])^T,$$

pois M_C é simétrica. Agora, basta usar a Proposição 1.17. □

Lema 1.23. *Seja $C = Z(F)$ uma cônica degenerada. Então C é um par de retas cruzadas se, e somente se, M_C tem posto 2. Mais ainda, C é uma reta dupla se, e somente se, M_C tem posto 1.*

Demonstração. Aqui usaremos a identificação da matriz M_C com o operador linear em $\mathbb{C}^3$ que lhe corresponde. Suponhamos que C seja um par de retas cruzadas e considere $P \in C$ o único ponto singular. Pela Proposição 1.17, isto equivale a dizer que $\dim \ker(M_C) = 1$, pois $\ker(M_C)$ será a reta associada a P em $\mathbb{C}^3$. Logo, M_C tem posto 2.

Agora, se $C = Z(L^2)$ é uma reta dupla, então todo ponto $P \in C$ é singular (veja Lema 1.10). Pela Proposição 1.17, isto equivale a dizer que $\ker(M_C)$ corresponde ao plano de $\mathbb{C}^3$ (que passa pela origem) definido por L, o qual é um subespaço de dimensão 2. Assim, $\dim \ker(M_C) = 2$ e, portanto, M_C tem posto 1. □

Observação 1.24. Notemos que se $C = Z(ax_0^2 + ax_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2)$ é um círculo, então

$$M_C = \begin{bmatrix} a & 0 & d/2 \\ 0 & a & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

é a matriz associada.

Colorário 1.25. Um círculo $C = Z(ax_0^2 + ax_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2)$ é não degenerado se, e somente se, $a(4af - d^2 - e^2) \neq 0$. Em particular, o círculo determinado pela

homogeneização de $H(x_0, x_1) = (x_0 - \alpha)^2 + (x_1 - \beta)^2 - r^2$ (onde $\alpha, \beta, r \in \mathbb{C}$) é não degenerado se, e somente se, $r \neq 0$.

Demonstração. Para a primeira parte, notemos que se M_C é a matriz associada a C, então

$$\det(M_C) = \frac{a(4af - d^2 - e^2)}{4}.$$

Agora, basta usar o Teorema 1.18. Para a segunda parte, notemos que se

$$H'(x_0, x_1, x_2) = a'x_0^2 + a'x_1^2 + d'x_0x_2 + e'x_1x_2 + f'x_2^2$$

é a homogeneização de $H(x_0, x_1)$, então $a' = 1$, $d' = -2\alpha$, $e' = -2\beta$ e $f' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Agora, o resultado segue da primeira parte. □

2 Dualidade e tangência

Nesta seção vamos mostrar que o conjunto de todas as retas projetivas planas está em correspondência biunívuca com o plano projetivo. Usamos esta correspondência para dar uma estrutura geométrica ao conjunto de retas tangentes a uma cônica dada. Além disso, mostramos que a relação de tangência entre duas cônicas pode ser estudada através da análise dos autoespaços de uma determinada matriz.

2.1 Dualidade

Como vimos na seção anterior, uma reta $r \subset \mathbb{P}^2$ é o conjunto dos zeros de

$$L = ax_0 + bx_1 + cx_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2],$$

um polinômio homogêneo de grau 1.

Definição 2.1. Denotamos por $(\mathbb{P}^2)^\vee$ o conjunto de todas as retas em $\mathbb{P}^2$. Este conjunto é chamado de *dual* de $\mathbb{P}^2$ ou *plano projetivo dual*. O mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : (\mathbb{P}^2)^\vee &\to \mathbb{P}^2 \\ Z(ax_0 + bx_1 + cx_2) &\mapsto [a : b : c] \end{aligned}$$

está bem definido (veja Proposição 1.4) e é chamado de *mapa dual*.

Lema 2.2. *Existe uma bijeção natural entre* $(\mathbb{P}^2)^\vee$ *e* $\mathbb{P}^2$.

Demonstração. Basta notar que o mapa dual

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : (\mathbb{P}^2)^\vee &\to \mathbb{P}^2 \\ Z(ax_0 + bx_1 + cx_2) &\mapsto [a : b : c] \end{aligned}$$

é bijetor. □

Observação 2.3. Se C é uma cônica não degenerada, então a composição

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{r_{(-)}C} & (\mathbb{P}^2)^\vee & \xrightarrow{\mathcal{D}(-)} & \mathbb{P}^2 \\ Q & \mapsto & r_Q C & \mapsto & \mathcal{D}(r_Q C) \end{array}$$

define um mapa de C para $\mathbb{P}^2$.

Definição 2.4. Seja C uma cônica não degenerada. Considere

$$\widetilde{C} := \left\{ P \in \mathbb{P}^2;\ P = \mathcal{D}(r_Q C),\ \text{onde } Q \in C \right\}.$$

Notemos que $\widetilde{C}$ parametriza o conjunto de todas as retas tangentes a C.

Exemplo 2.5. Considere a cônica $C = Z(ax_0^2 + cx_1^2 + fx_2^2)$, onde $a \cdot c \cdot f \neq 0$. Segue que $\widetilde{C} = Z(a^{-1}x_0^2 + c^{-1}x_1^2 + f^{-1}x_2^2)$. De fato, primeiro observemos que os pontos de $\widetilde{C}$ são da forma $[aq_0 : cq_1 : fq_2]$, para $[q_0 : q_1 : q_2] \in C$ (veja Proposição 1.17). Logo, vale a seguinte inclusão $\widetilde{C} \subseteq Z(a^{-1}x_0^2 + c^{-1}x_1^2 + f^{-1}x_2^2)$. Por outro lado, se $C_1 := Z(a^{-1}x_0^2 + c^{-1}x_1^2 + f^{-1}x_2^2)$, então

$$\begin{aligned} P = [p_0 : p_1 : p_2] \in C_1 &\implies a^{-1}p_0^2 + c^{-1}p_1^2 + f^{-1}p_2^2 = 0 \\ &\implies a(a^{-1}p_0)^2 + c(c^{-1}p_1)^2 + f(f^{-1}p_2)^2 = 0 \\ &\implies [a^{-1}p_0 : c^{-1}p_1 : f^{-1}p_2] \in C. \end{aligned}$$

Como antes, temos que $P = [a(a^{-1}p_0) : c(c^{-1}p_1) : f(f^{-1}p_2)] \in \widetilde{C}$. Logo, $\widetilde{C} = C_1$.

O Exemplo 2.5 nos apresenta algo interessante: O conjunto $\widetilde{C}$, que parametriza as retas tangentes a uma cônica não degenerada C, é ele próprio uma cônica. Na verdade, isto é um caso particular do seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma cônica não degenerada. Então $\widetilde{C} \subset \mathbb{P}^2$ é uma cônica não degenerada.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que como C é não degenerada, então M_C é invertível. Além disso, temos que pela demonstração da Proposição 1.17, para cada $Q \in C$, segue que $[\mathcal{D}(r_Q C)]^T = [Q]^T \cdot M_C$ e, consequentemente,

$$[\mathcal{D}(r_Q C)] = (M_C)^T \cdot [Q] = M_C \cdot [Q].$$

Assim,

$$\begin{aligned} P \in \widetilde{C} &\iff P = \mathcal{D}(r_Q C) \text{ e } Q \in C \\ &\iff [P]^T = \lambda \cdot ([Q]^T \cdot M_C) \text{ e } Q \in C, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ &\iff [P]^T (M_C)^{-1} [P] = 0 \text{ e } \lambda \cdot [Q]^T = [P]^T (M_C)^{-1}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ &\iff P \text{ pertence a cônica associada a matriz } (M_C)^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{C}$ é uma cônica e $M_{\widetilde{C}} = (M_C)^{-1}$ é a matriz associada. □

Colorário 2.7. Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma cônica não degenerada. Assim, $\widetilde{\widetilde{C}} = C$.

Demonstração. Pela prova do Teorema 2.6, temos que se M_C é a matriz associada a C, então $(M_C)^{-1}$ é a matriz associada a $\widetilde{C}$. Como $\left((M_C)^{-1}\right)^{-1} = M_C$, segue que $\widetilde{\widetilde{C}} = C$. □

Colorário 2.8. Seja $C = Z(ax_0^2 + ax_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2)$ um círculo não degenerado. A cônica $\widetilde{C}$ é também um círculo se, e somente se, $d = e = 0$.

Demonstração. Notemos que se M_C é a matriz associada ao círculo C, então

$$(M_C)^{-1} = -\frac{1}{-4af + d^2 + e^2} \begin{bmatrix} (4af - e^2)/a & (ed)/a & -2d \\ (ed)/a & (4af - d^2)/a & -2e \\ -2d & -2e & 4a \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\widetilde{C}$ é um círculo se, e somente se,

$$ed = 0 \quad \text{e} \quad d^2 = e^2.$$

Concluímos que $\widetilde{C}$ é um círculo se, e somente se, $d = e = 0$. □

Observação 2.9. Lembremos que M_C e $\lambda \cdot M_C$, com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, determinam a mesma cônica C. Desta forma, a prova do Teorema 2.6 nos fornece uma maneira natural de equipar o conjunto de retas tangentes a uma cônica com uma estrutura algébrica.

Definição 2.10. Sejam $C \subset \mathbb{P}^2$ uma cônica, M_C sua matriz associada e $\mathrm{Adj}(M_C)$ a matriz adjunta de M_C. Definimos $C^\vee$, a *cônica dual* de C, como o conjunto dos pontos P em $\mathbb{P}^2$ para os quais

$$[P]^T \cdot \mathrm{Adj}(M_C) \cdot [P] = 0.$$

A seguir, apresentaremos um resultado geral sobre matrizes, cuja demonstração pode ser encontrada em [6]. Esse resultado será útil para caracterizar a cônica dual de uma cônica C qualquer em função do posto de M_C.

Teorema 2.11. *Seja M uma matriz quadrada de ordem n com entradas em $\mathbb{C}$.*

(*i*) *Se posto de M é n, então $\mathrm{Adj}(M)$ é invertível;*

(*ii*) *Se posto de M é $n-1$, então o posto de $\mathrm{Adj}(M)$ é 1;*

(*iii*) *Se posto de M é menor do que $n-1$, então $\mathrm{Adj}(M) = 0$.*

Observação 2.12. Sejam C uma cônica e M_C a matriz associada. Desta forma, temos que $C^\vee$ é uma cônica se o posto de M_C for maior do que 1. Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Colorário 2.13. Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma cônica.

(*i*) Se C é não degenerada, então $C^\vee = \widetilde{C}$;

(*ii*) Se C é um par de retas cruzadas, então $C^\vee$ é uma reta dupla;

(*iii*) Se C é uma reta dupla, então $C^\vee = \mathbb{P}^2$.

Demonstração. Segue do Teorema 1.18, Lema 1.23, demonstração do Teorema 2.6, Observação 2.9 e do Teorema 2.11. □

Definição 2.14. Seja $P \in \mathbb{P}^2$. O conjunto

$$P^\vee := \left\{ Q \in \mathbb{P}^2;\ Q = \mathcal{D}(r),\ \text{onde a reta } r \text{ passa por } P \right\}$$

é chamado de *reta dual* de P.

O próximo resultado mostra que a reta dual de um ponto é, de fato, uma reta.

Proposição 2.15. Seja $P \in \mathbb{P}^2$. Então $P^\vee$ é uma reta.

Demonstração. Suponhamos que $P = [a : b : c]$. Basta notar que

$$\begin{aligned} Q \in P^\vee &\iff Q = \mathcal{D}(r), \text{ onde a reta } r \text{ passa por } P \\ &\iff Q = [a' : b' : c'] \text{ e } aa' + bb' + cc' = 0 \\ &\iff Q \in r', \text{ onde } r' = Z(ax_0 + bx_1 + cx_2), \end{aligned}$$

ou seja, $P^\vee = Z(ax_0 + bx_1 + cx_2)$. □

Geometricamente, podemos ver que se associarmos P ao respectivo ponto de $\mathbb{C}^3$, então $P^\vee$ corresponde, em $\mathbb{C}^3$, ao plano que passa pela origem e é ortogonal a reta que contém a origem e P.

Observação 2.16. Notemos que para toda reta r em $\mathbb{P}^2$, podemos escrever $r = \mathcal{D}(r)^\vee$.

Colorário 2.17. Sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$, com $P_1 \neq P_2$. Então $P_1^\vee \cap P_2^\vee = \{\mathcal{D}(r)\}$, onde r é a reta que passa por P_1 e P_2.

Colorário 2.18. Sejam P e r um ponto e uma reta em $\mathbb{P}^2$, respectivamente. Desta forma, temos que $P \in r$ se, e somente se, $\mathcal{D}(r) \in P^\vee$.

2.2 Tangência

Nesta subseção, utilizamos a noção de cônica dual, introduzida anteriormente, para caracterizar a tangência entre uma reta e uma cônica em termos matriciais. Além disso, exploramos a dualidade para definir a tangência entre duas cônicas por meio das respectivas cônicas duais.

Definição 2.19. Sejam $r, C \subset \mathbb{P}^2$ uma reta e uma cônica, respectivamente. Dizemos que r é *tangente* a C se $\mathcal{D}(r) \in C^\vee$, ou seja, se $[\mathcal{D}(r)]^T \text{Adj}(M_C)[\mathcal{D}(r)] = 0$.

O próximo resultado garante a consistência entre as Definições 1.5 e 2.19 no que diz respeito à reta tangente a uma cônica.

Proposição 2.20. Seja C uma cônica em $\mathbb{P}^2$.

(*i*) Se P é um ponto não singular de C, então a reta $r_P C$ tangente a C no ponto P é uma reta tangente a C, no sentido da Definição 2.19;

(*ii*) Se C é não degenerada e r é uma reta tangente a C, então $r \cap C = \{P\}$, onde $P = (M_C)^{-1} \cdot [\mathcal{D}(r)]$. Além disso, r coincide com $r_P C$;

(*iii*) Na situação do item (*ii*), vale ainda que $P^\vee$ é a reta tangente a $C^\vee$ no ponto $\mathcal{D}(r)$.

Demonstração. Pela Proposição 1.17, temos que se $P \in C$ é um ponto não singular, então $[\mathcal{D}(r_P C)] = \lambda \cdot M_C \cdot [P]$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}(r_P C)]^T \cdot \mathrm{Adj}(M_C) \cdot [\mathcal{D}(r_P C)] &= \lambda^2 \Big(\big([P]^T \cdot M_C\big) \cdot \mathrm{Adj}(M_C) \cdot \big(M_C \cdot [P]\big) \Big) \\ &= \lambda^2 \cdot \det(M_C) \cdot \big([P]^T \cdot M_C \cdot [P]\big) \\ &= 0 \text{ (pois } P \in C).\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{D}(r_P C) \in C^\vee$. Isto prova o item (i).

Agora, suponhamos que C é não degenerada e que r é uma reta tangente a C. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(r) \in C^\vee &\implies [\mathcal{D}(r)]^T \mathrm{Adj}(M_C)[\mathcal{D}(r)] = 0 \\ &\implies [\mathcal{D}(r)]^T (M_C)^{-1}[\mathcal{D}(r)] = 0 \\ &\implies \big((M_C)^{-1}[\mathcal{D}(r)]\big)^T \cdot M_C \cdot \big((M_C)^{-1}[\mathcal{D}(r)]\big) = 0 \\ &\implies P = (M_C)^{-1}[\mathcal{D}(r)] \in C.\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.17 e Corolário 1.21, concluímos o item (ii). Deixamos o último item a cargo do leitor. □

Exemplo 2.21. Seja C uma reta dupla. Então toda reta $r \subset \mathbb{P}^2$ é tangente a C.

Proposição 2.22. Sejam $C = Z(L_1 \cdot L_2)$ um par de retas cruzadas e $P \in Z(L_1) \cap Z(L_2)$. Desta forma, toda reta que passa por P é tangente a C. Mais precisamente, $C^\vee = Z(L^2)$, onde $Z(L) = P^\vee$.

Demonstração. Suponhamos que $L_1 = \sum_{i=0}^{2} a_i x_i$ e $L_2 = \sum_{i=0}^{2} b_i x_i$. Neste caso, P pode ser determinado pela classe do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$, onde $\vec{u} = (a_0, a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_0, b_1, b_2)$. Mais precisamente, temos que $P = [a_1 b_2 - b_1 a_2 : -a_0 b_2 + b_0 a_2 : a_0 b_1 - a_1 b_0]$. Além disso, se M_C é a matriz associada a C, então $M_C = (c_{ij})$ sendo

$$c_{ij} = \frac{a_i b_j + a_j b_i}{2}$$

para todos $i, j \in \{0, 1, 2\}$. A matriz adjunda de M_C (que tem posto 1) é

$$\begin{aligned}\mathrm{Adj}(M_C) &= -\begin{bmatrix} \frac{(a_1b_2 - b_1a_2)^2}{4} & \frac{(a_1b_2 - b_1a_2)(-a_0b_2 + b_0a_2)}{4} & \frac{(a_1b_2 - b_1a_2)(a_0b_1 - a_1b_0)}{4} \\ \frac{(-a_0b_2 + b_0a_2)(a_1b_2 - b_1a_2)}{4} & \frac{(-a_0b_2 + b_0a_2)^2}{4} & \frac{(-a_0b_2 + b_0a_2)(a_0b_1 - a_1b_0)}{4} \\ \frac{(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - b_1a_2)}{4} & \frac{(a_0b_1 - a_1b_0)(-a_0b_2 + b_0a_2)}{4} & \frac{(a_0b_1 - a_1b_0)^2}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha[P]^T \\ \beta[P]^T \\ \delta[P]^T \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\delta \neq 0$, visto que as retas $Z(L_1)$ e $Z(L_2)$ são diferentes (veja Observação 1.9). Portanto, se $r \in P^\vee$, então $[P]^T \cdot [\mathcal{D}(r)] = 0$ e, consequentemente,

$$\text{Adj}(M_C) \cdot [\mathcal{D}(r)] = \begin{bmatrix} \alpha[P]^T \cdot [\mathcal{D}(r)] & \beta[P]^T \cdot [\mathcal{D}(r)] & \delta[P]^T \cdot [\mathcal{D}(r)] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Desta forma, concluímos que $P^\vee \subset C^\vee$. Como $C^\vee$ é uma reta dupla, segue que $C^\vee = Z(L^2)$, onde $P^\vee = Z(L)$. □

Definição 2.23. Sejam C_1 e C_2 duas cônicas e $P \in C_1 \cap C_2$. Dizemos que C_1 e C_2 são *tangentes* em P quando existe uma reta $r \subset \mathbb{P}^2$ tal que $\mathcal{D}(r) \in P^\vee \cap C_1^\vee \cap C_2^\vee$.

Observação 2.24. Notemos que se $P \in C$ é singular, então $P^\vee \cap C^\vee = P^\vee$. Por outro lado, se $P \in C$ é não singular, então $P^\vee \cap C^\vee = \{\mathcal{D}(r_P C)\}$. De fato, se C é não singular, então $P^\vee$ é a reta tangente a $C^\vee$ em $\mathcal{D}(r_P C)$ e, agora, use o Corolário 1.21. Se C é singular, então C é um par de retas cruzadas (já que $P \in C$ é não singular). Neste caso, temos que $C^\vee = Q^\vee$ onde $Q \in C$ é o único ponto singular ($P \neq Q$). Portanto, $P^\vee \cap C^\vee = P^\vee \cap Q^\vee = \{\mathcal{D}(r)\}$, onde r é a reta que passa por P e Q e, também, r é a reta tangente a C em P.

Lema 2.25. *Sejam C_1 e C_2 duas cônicas e $P \in C_1 \cap C_2$. Se P é um ponto singular de C_1 ou de C_2, então C_1 e C_2 são tangentes em P.*

Demonstração. Se P é um ponto singular de C_1 e de C_2, então C_1 e C_2 são tangentes em P, pois $P^\vee \cap C_1^\vee \cap C_2^\vee = P^\vee$ e, portanto, toda reta r que passa por P cumprirá $\mathcal{D}(r) \in P^\vee \cap C_1^\vee \cap C_2^\vee$. Por outro lado, se P é um ponto singular de C_1 e não singular de C_2, então C_1 e C_2 são tangentes em P, pois

$$P^\vee \cap C_1^\vee \cap C_2^\vee = P^\vee \cap C_2^\vee = \{\mathcal{D}(r_P C_2)\}$$

como gostaríamos. □

Observação 2.26. Sejam C_1 e C_2 duas cônicas e suponhamos que a interseção $C_1 \cap C_2$ não contenha pontos singulares de C_1 ou C_2. Se C_1 e C_2 são tangentes em $P \in C_1 \cap C_2$, então apenas duas situações podem ocorrer:

a) Ambas as cônicas C_1 e C_2 são não degeneradas, ou

b) C_1 é uma cônica não degenerada e C_2 é um par de retas cruzadas que se intersectam em um ponto Q, com $Q \notin C_1 \cap C_2$.

A seguir, analisaremos cada um desses casos em detalhes.

Teorema 2.27. *Sejam C_1 e C_2 duas cônicas não degeneradas e $P \in C_1 \cap C_2$. As cônicas C_1 e C_2 são tangentes em P se, e somente se, existe $\vec{u}$ um autovetor não nulo de $(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}$ tal que $[\vec{u}] = [P]$.*

Demonstração. Seja $r_i = (M_{C_i} \cdot [P])^\vee$ a reta tangente a C_i no ponto P, para $i = 1, 2$. Assim, $P^\vee \cap C_1^\vee = \{\mathcal{D}(r_1)\}$ e $P^\vee \cap C_2^\vee = \{\mathcal{D}(r_2)\}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r_1) = \mathcal{D}(r_2) &\iff r_1 = r_2 \\
&\iff M_{C_1} \cdot [P] = \lambda M_{C_2} \cdot [P], \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \\
&\iff \left((M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}\right) \cdot [P] = \lambda [P], \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \\
&\iff \left((M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}\right) \cdot [\vec{u}] = \lambda [\vec{u}], \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } [\vec{u}] = [P] \\
&\iff \vec{u} \text{ é um autovetor de } (M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1} \text{ e } [\vec{u}] = [P],
\end{aligned}$$

como gostaríamos. □

Observação 2.28. O Teorema 2.27 nos diz que os pontos de tangência entre C_1 e C_2 (se existirem) estão nos autoespaços de $(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}$. Desta forma, para calcular os pontos tangentes, basta primeiro calcular os autoespaços de $(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}$ e, dentre estes vetores, analisar quais pontos (associados a esses vetores) são comuns às duas cônicas.

Exemplo 2.29. Determinar os pontos de tangência entre as cônicas $C_1 = Z(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$ e $C_2 = Z(x_0^2 + x_1^2 - 4x_0x_2 + 3x_2^2)$. Neste caso, temos duas cônicas não degeneradas e, portanto, podemos calcular a inversa da matriz mais simples para usar o Teorema 2.27. Notemos que

$$M_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, os pontos tangentes a C_1 e C_2 estão entre os autovetores de

$$(M_{C_1})^{-1} \cdot M_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Os autoespaços de $(M_{C_1})^{-1} \cdot M_{C_2}$ são $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ x = z = 0\}$ associado ao autovalor $\lambda = 1$ e $V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ x = z \text{ e } y = 0\}$ associado ao autovalor $\lambda = -1$. Notemos que $Q = [0 : 1 : 0]$ não pertence a C_1 nem a C_2 e que $P = [1 : 0 : 1]$ é o único ponto de tangência entre C_1 e C_2, cuja reta tangente é $r = Z(L_1)$, onde $L_1 = [P]^T \cdot M_{C_1} \cdot [\underline{x}] = x_0 - x_2$ (veja Proposição 1.17).

Exemplo 2.30. Determine todos os pontos de tangência entre $C_1 = Z(x_0^2 + 4x_1^2 - 2x_0x_2 + 8x_1x_2 + x_2^2)$ e $C_2 = Z(x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$. Notemos que

$$M_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, assim,

$$(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Os autoespaços de $(M_{C_2})^{-1} \cdot M_{C_1}$ são $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ x = z\}$ associado ao autovalor $\lambda = 4$ e $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ y = z = 0\}$ associado ao autovalor $\lambda = 1$. Notemos que $[1 : 0 : 0] \notin C_1 \cap C_2$. Agora, vamos verificar se existe algum $\vec{u} = (a, b, a) \in V_4$ (não nulo) tal que $P = [a : b : a] \in C_1 \cap C_2$. Para $a \neq 0$, temos que $[1 : b : 1] \in C_1 \cap C_2$ se, e somente se, $b = 0$ ou $b = -2$. Por outro lado, se $a = 0$, então $[0 : 1 : 0] \notin C_1 \cap C_2$. Desta forma, temos que C_1 e C_2 são tangentes nos pontos $P_1 = [1 : 0 : 1]$ e $P_2 = [1 : -2 : 1]$.

Colorário 2.31. Sejam C_1 e C_2 duas cônicas em $\mathbb{P}^2$ e P um ponto em $C_1 \cap C_2$. Suponhamos que C_1 é não degenerada, C_2 é um par de retas cruzadas que se intersectam num ponto Q e $P \neq Q$. O ponto P é um ponto de tangência entre C_1 e C_2 se, e somente se, $(M_{C_1})^{-1} \cdot M_{C_2}$ possui algum autovetor $\vec{v}$, com $[\vec{v}] = [P]$.

Demonstração. Segue da demonstração do Teorema 2.27. □

Exemplo 2.32. Determine os pontos de tangência entre $C_1 = Z(x_0^2 + x_1^2 - 4x_0x_2 + 2x_2^2)$ e $C_2 = Z(x_0^2 - 8x_0x_1 + 7x_1^2 - 6x_0x_2 + 6x_1x_2)$. Neste exemplo, notemos que C_1 é não degenerada. Como

$$M_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -4 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$(M_{C_1})^{-1} \cdot M_{C_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 3 \\ 1/2 & 5/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os autoespaços de $(M_{C_1})^{-1} \cdot M_{C_2}$ são dados por $V_0 = \{(x, x, -x) \in \mathbb{C}^3;\ x \in \mathbb{C}\}$ associado ao autovalor $\lambda = 0$ e $V_6 = \{(x, x, x) \in \mathbb{C}^3;\ x \in \mathbb{C}\}$ associado ao autovalor $\lambda = 6$. Observemos que $Q = [1 : 1 : -1]$ é (o único) ponto singular de C_2, porém não pertence a C_1. Por outro lado, temos que $P = [1 : 1 : 1]$ pertence à interseção $C_1 \cap C_2$ e, portanto, P é o único ponto de tangência entre C_1 e C_2. A reta tangente a C_1 (ou a C_2) no ponto P é $r = Z(-x_0 + x_1)$.

Agradecimentos

Agradecemos ao parecerista anônimo pelas sugestões e correções, que ajudaram a melhorar a clareza e a precisão do texto.

Referências

[1] Bashelor, Andrew; Ksir, Amy; Traves, Will: Enumerative Algebraic Geometry of Conics, The American Mathematical Monthly, **115(8)**, 2008, pp. 701-728.

[2] Coelho, Flávio U.; Lourenço, Mary L.: Um Curso de álgebra Linear. 2^a ed. Edusp, 2018, 272p.

[3] Coxeter, Harold S.M.: The Problem of Apollonius, Math. Monthly, **75** (1968) 5-15. Reprinted in the Canad. Math. Bull., **11**, 1968, pp. 1-17.

[4] Eisenbud, David; Harris, Joe: 3264 and All That: A Second Course in Algebraic Geometry. Cambridge University Press; 2016, 616p.

[5] Fulton, William: Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry. N.p., n.p., 2008, 120p.

[6] Sinkhorn, Richard: The Range of the Adjugate Map. Mathematics Magazine, **66(2)**, 1993, pp. 109-113.

[7] Vainsencher, Israel: Introdução às Curvas Algébricas Planas. 3^a ed. IMPA, 2017, 151p.

Recebido em 02 de Novembro de 2024
Revisado em 25 de Fevereiro de 2025
Aceito em 05 de Março 2025