

NÚMEROS TRANSCENDENTES E AS EQUAÇÕES DA FORMA
 $x^n = n^x$
TRANSCENDENT NUMBERS AND EQUATIONS OF THE FORM $x^n = n^x$

Maria Eloisa Ferreira dos Santos
Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco - SEE-PE
elo.santos8@hotmail.com
Alcindo Teles Galvão
Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca
alcindo.galvao@arapiraca.ufal.br

Resumo

Dos diversos problemas ainda não resolvidos da Matemática, alguns tratam-se de conceitos e elementos advindos da Teoria dos Números Transcendentes, podendo citar como exemplo a dificuldade em demonstrar que a natureza de um número é transcendental. A partir dos avanços nessa teoria, um dos resultados que é de extrema importância para “construir” um número transcendente na forma de potência é o Teorema de Gelfond-Schneider. Inserido nesse cenário de potências transcendentais, é pouco conhecida a natureza de potências da forma n^T , com $n \in \mathbb{N}$ e T transcendente. A respeito dos números 2^π e 2^e , por exemplo, ainda não se sabe se são transcendentais ou não. Diante disso, neste trabalho realizamos um estudo sobre as soluções da equação $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ e sua relação com números transcendentais da forma n^T , dentro das condições apresentadas. Com isso, definimos um critério de transcendência para tais potências e também destacamos que tal resultado não é único, existem outros números transcendentais que não atendem a esse critério, bem como existem números da forma n^T que são algébricos.

Palavras-chave: Números algébricos; potências transcendentais; teorema de Gelfond-Schneider.

Abstract

Of the many unresolved problems in Mathematics, some are concepts and elements arising from the Theory of Transcendent Numbers, for example the difficulty in demonstrating that the nature of a number is transcendental. Based on advances in this theory, one of the results that is extremely important for “constructing” a transcendental number in the form of a power is the Gelfond-Schneider Theorem. Inserted in

this scenario of transcendent powers, the nature of powers of the form n^T , with $n \in \mathbb{N}$ and T transcendent, is little known. Regarding the numbers 2^π and 2^e , for example, it is not yet known whether they are transcendent or not. Therefore, in this work we carried out a study on the solutions of the equation $x^n = n^x$, with $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ and $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ and its relationship with transcendent numbers of the form n^T , within the conditions presented. With this, we define a transcendence criterion for such powers and also highlight that such a result is not unique, there are other transcendent numbers that do not meet this criterion, as well as there are numbers of the form n^T that are algebraic.

Keywords: Algebraic numbers; transcendent powers; Gelfond-Schneider theorem.

1 Introdução

No decorrer da história da humanidade, os números foram surgindo das necessidades básicas de contar e medir. Do ponto de vista macroscópico, a infinidade dos números é algo evidente, seja para matemáticos ou não, principalmente com relação aos números naturais. Por outro lado, menos trivial, é olhar por um ponto de vista microscópico: imaginemos uma régua de 30 centímetros que possa ser ampliada tanto quanto se queira. Qual a natureza dos números observados?

Os números são classificados de acordo com as suas particularidades. A definição de um número nos diz a qual conjunto ele pertence: naturais, inteiros, racionais ou irracionais. Um estudo detalhado acerca dos conjuntos numéricos é realizado ainda nos anos finais do Ensino Fundamental. No entanto, uma perspectiva diferente acerca dos números reais é menos conhecida: classificá-los de acordo com suas propriedades algébricas.

Nem todos os números reais satisfazem equações algébricas. De um modo geral, todo número que é solução de uma equação algébrica não nula com coeficientes inteiros são chamados de *algébricos*, e aqueles que não satisfazem tais equações são chamados de *transcendentes*. Daí, escolhendo um número aleatoriamente na reta real, ou este número é algébrico, ou é transcendente. Com isso, podemos definir o conjunto dos números reais como a união disjunta entre números algébricos e transcendentos, diferente da forma convencional que é dada como a união de racionais e irracionais.

Essa definição para a transcendência de um número é de meados do século XVIII, dada por Leonhard Euler, que foi o primeiro matemático a questionar sobre a existência de números reais que não são algébricos. A palavra *transcendente* é atribuída ao fato de que esses números transcendem as operações algébricas.

No entanto, a teoria dos números transcendentos teve seu início de fato apenas em

1844, quando o matemático Joseph Liouville estabeleceu a seguinte propriedade: para todo número α algébrico de grau $n \geq 2$, existe uma constante A maior que zero tal que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Portanto, um número não racional que não satisfaz tal propriedade é transcendente. Além disso, Liouville construiu e exibiu o primeiro transcendente, o número $\sum_{n>0} 10^{-n!} = 0,1100010\dots$, um dos poucos transcendentos que conhecemos a estrutura.

Os números π e e são os transcendentos mais "populares", mas a prova deste fato veio apenas 90 anos após o falecimento de Euler. Em 1873 Charles Hermite provou a transcendência de e e alguns anos depois, em 1882, π teve sua transcendência confirmada por Ferdinand Von Lindemann.

Não existe um algoritmo para demonstrar que um número é transcendente. Cada demonstração utiliza resultados e argumentos distintos, o que contribui para a dificuldade de provar a transcendência de um número. As provas de que e e π são transcendentos podem ser encontradas em [1]. Segundo Marques [3], apesar das contribuições de grandes matemáticos para a teoria dos números transcendentos, esta ainda é pouco conhecida devido à ausência de teoremas fundamentais.

Entre os desafios e casos em aberto para os pesquisadores na área, está a natureza de potências da forma n^T , com $n \in \mathbb{N}$ e T transcendente. A respeito dos números 2^π e 2^e , por exemplo, ainda não se sabe se são transcendentos ou não. Diante disso, o ponto de partida para o desenvolvimento desta pesquisa foi a busca pelas soluções da equação $x^2 = 2^x$. Sabe-se que tais soluções podem ser observadas graficamente, pois são dadas pelas interseções dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ conforme é exibido na Figura 1.

As soluções 2 e 4, representadas pelos pontos A e B, podem ser encontradas com facilidade, mesmo sem o auxílio do gráfico. No entanto, a solução representada pelo ponto C exige um trabalho um pouco mais árduo para ser encontrada. Isso se deve ao fato de que tal solução é transcendente.

O professor Elon Lages Lima, em sua obra "Meu Professor de Matemática e outras histórias", abordou esse problema no capítulo intitulado "Quais são as raízes da equação $2^x = x^2$ ". Tomando tal referência como motivação, o próximo passo foi verificar se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e maior que 1, as equações da forma $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ também teriam soluções transcendentos.

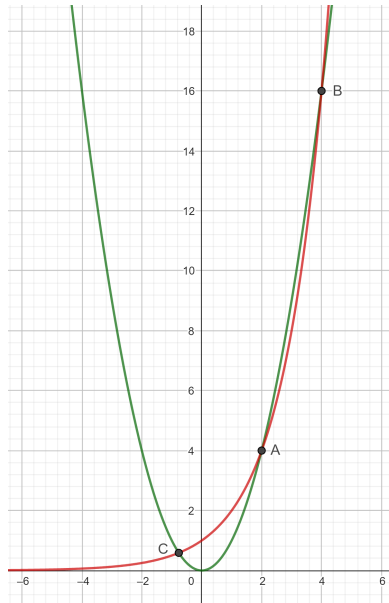


Figura 1: Interseção das curvas x^2 e 2^x .

2 Preliminares

2.1 Conceitos iniciais

Definição 2.1. Um número real α é dito algébrico quando é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes inteiros, isto é, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $P(x) \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}$ tal que $P(\alpha) = 0$. O conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Definição 2.2. Seja α um número algébrico, e $P(x)$ o polinômio mônico de menor grau em $\mathbb{Q}[X] - \{0\}$ que tem α como raiz. Dizemos que $P(x)$ é o polinômio minimal de α , e o grau de α é igual ao grau de seu polinômio minimal.

Exemplo 2.3. O número $\sqrt{2}$ é algébrico de grau 2, pois seu polinômio minimal é $A(x) = x^2 - 2$.

Proposição 2.1. Todo número racional é um número algébrico.

Demonstração. De fato, todo racional $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio $R(x) = qx - p$. E em particular, todo racional é um número algébrico de grau 1. \square

Definição 2.4. Um número real é transcendente quando não é algébrico.

2.2 Propriedades aritméticas

No livro [5] é tratado com detalhes que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação às operações aritméticas, no entanto, esse contexto muda quando tratamos do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$. Nesta seção iremos explorar as propriedades aritméticas do conjunto dos números algébricos, bem como as propriedades entre algébricos e transcendententes.

Proposição 2.2. *Sejam α, β , números algébricos não nulos. Temos:*

1. $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
2. $\alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
3. $\alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$, se $\alpha \neq 0$;
4. $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

As demonstrações dos itens (1) e (2) estão presentes em [7], (p. 41). Entre as ferramentas utilizadas para a demonstração desses itens, são utilizados os conceitos de espaço vetorial, base e dimensão, presentes na Álgebra Linear. O item (3) é demonstrado utilizando a definição de número algébrico e no (4) utilizamos o Princípio de Indução Finita.

Demonstração. 1. Sejam $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, $Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ os polinômios minimais de α e β , respectivamente. Façamos $\frac{P(x)}{a_n}$ e $\frac{Q(x)}{b_n}$. Obtemos seus polinômios equivalentes mônicos com coeficientes racionais, a saber

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_1\beta + b_0 = 0 \quad (2.2)$$

isto é,

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_1\alpha - a_0, \quad (2.3)$$

e

$$\beta^m = b_{m-1}\beta^{m-1} - \dots - b_1\beta - b_0. \quad (2.4)$$

Multiplicando a equação (2.1) por α , temos

$$\alpha^{n+1} + a_{n-1}\alpha^n + \dots + a_1\alpha^2 + a_0\alpha = 0,$$

e substituindo α^n pela expressão obtida em (2.3), obtemos

$$\alpha^{n+1} = -a_{n-1}(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_1\alpha - a_0) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \dots - a_0\alpha.$$

Assim, obtemos α^{n+1} escrito como combinação linear de $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais. Diante disso, note que, repetindo tal operação sucessivas vezes, concluímos que todas as potências α^i , para $i \geq n$, são expressas como combinações lineares de $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais.

Assim, realizando as mesmas operações entre as equações (2.2) e (2.4), conclui-se que β^j pode ser escrito como combinação linear dos números $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{m-1}$, para todo $j \geq m$.

Consideremos os $mn + 1$ números $1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \dots, (\alpha + \beta)^{mn}$ e o espaço vetorial sobre \mathbb{Q} gerado pelos elementos $B = \{1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \dots, \alpha^{n-1}\beta^{m-1}\}$.

Como B é um conjunto de geradores de mn elementos, então possui uma base com cardinalidade menor ou igual a mn . Então a dimensão deste espaço é menor ou igual a mn , logo, os $mn + 1$ números acima são linearmente dependentes. Portanto, existem racionais r_0, r_1, \dots, r_{mn} , não todos nulos, tais que $r_0 + r_1(\alpha + \beta) + r_2(\alpha + \beta)^2 + \dots + r_{mn}(\alpha + \beta)^{mn} = 0$. O que mostra que $\alpha + \beta$ é um número algébrico.

2. De modo análogo ao raciocínio do item (1), considere agora o conjunto $C = \{1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \dots, (\alpha\beta)^{mn}\}$. Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, os elementos de C são combinações lineares finitas sobre \mathbb{Q} das mn parcelas $\alpha^k\beta^l$, com $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Assim, os elementos de C são linearmente dependentes sobre \mathbb{Q} , o que implica que existem racionais s_0, s_1, \dots, s_{mn} , não todos nulos, tais que $s_0 + s_1(\alpha\beta) + s_2(\alpha\beta)^2 + \dots + s_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0$. Logo, $\alpha\beta$ é algébrico.

3. Por hipótese, existe $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau n , tal que $P(\alpha) = 0$. Daí,

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0. \quad (2.5)$$

Considere o polinômio $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Multiplicando a equação (2.5) por $\frac{1}{\alpha^n}$, obtemos

$$a_n + a_{n-1}\alpha^{-1} + \dots + a_1\alpha^{1-n} + a_0\alpha^{-n} = 0.$$

e portanto

$$a_0(\alpha^{-1})^n + a_1(\alpha^{-1})^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\alpha^{-1}) + a_n = 0. \quad (2.6)$$

Logo, pela equação (2.6), α^{-1} é raiz de $P_1(x) \in \mathbb{Q}[X] - \{0\}$, isto é, $P_1(\alpha^{-1}) = 0$, o que implica que α^{-1} é algébrico.

4. Inicialmente, note que, se $m = 0$ ou $\alpha = 0$, não há nada a demonstrar. Do mesmo modo, nos casos $m = 1$ e $m = -1$, pois em tais casos $\alpha^m = \alpha$ e $\alpha^m = \frac{1}{\alpha}$, que são ambos racionais. Consideremos, então, os casos em que $m > 1$ e $m < -1$. A demonstração será feita utilizando o Princípio de Indução Finita, em ambos os casos.

Seja $m > 1$. Para $m = 2$, basta fazer $\beta = \alpha$ em (ii) e obtemos $\alpha\alpha = \alpha^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$. Suponha que α^m é um número algébrico, e provemos que α^{m+1} também o é. De fato, note que $\alpha^{m+1} = \alpha\alpha^m$. Daí, pela hipótese de indução, $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, assim, por (ii), o produto de algébricos também é um número algébrico, logo, $\alpha^{m+1} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e, pelo Princípio de Indução Finita, $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\forall m \in \mathbb{Z}, m > 0$.

Se $m < -1$, então $\alpha^m = (\alpha^{-m})^{-1}$, logo, segue do primeiro caso e do item (iii) que α^m é algébrico. □

Diante do que foi discutido até então, podemos concluir que todo número transcendente é irracional. Com isso, como os irracionais não são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão, também não há uma proposição apenas com a aritmética dos transcendentos. Assim, no que segue, enunciaremos a proposição que determina as propriedades aritméticas entre transcendentos e algébricos.

2.3 Aritmética entre transcendentos e algébricos

Proposição 2.3. *Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Então,*

1. $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;
2. $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;
3. $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$;
4. $T^n \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$;
5. $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Demonstração. 1. Suponha que $\alpha \pm T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Considere que $\alpha + T = K_1$, e $\alpha - T = K_2$ onde K_1 e K_2 são números algébricos. Segue disso que $K_1 - \alpha = K_1 + (-\alpha) = T$ e $\alpha + (-K_2) = T$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pela proposição anterior. Logo, $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

2. Suponhamos que $\alpha T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Daí, $\alpha T = K$, com K algébrico. Multiplicando ambos os membros da última igualdade por α^{-1} , obtemos:

$$\alpha \alpha^{-1} T = K \alpha^{-1} \Leftrightarrow T = K \alpha^{-1}.$$

Mas α^{-1} é algébrico, e portanto, $K \alpha^{-1}$ também o é, o que implica que T seria algébrico, uma contradição. Portanto, $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

3. Suponha que T^{-1} fosse um número algébrico K . Então $T^{-1} = K$ e multiplicando essa igualdade por T , teríamos

$$T^{-1} = K \Leftrightarrow TT^{-1} = KT \Leftrightarrow 1 = KT.$$

Assim, por (2), concluiríamos que 1 é transcendente, um absurdo. Logo, $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

4. Suponha, por absurdo, que $T^n \in \overline{\mathbb{Q}}$. Então existe um polinômio $P(x)$, de grau m , com coeficientes racionais a_0, a_1, \dots, a_m tal que $P(T^n) = 0$. Daí,

$$P(T^n) = a_m(T^n)^m + a_{m-1}(T^n)^{m-1} + \dots + a_1 T^n + a_0 = 0.$$

Considere o polinômio $R(x) = a_m x^{mn} + a_{m-1} x^{mn-n} + \dots + a_1 x^n + a_0$, de grau mn . Desenvolvendo $P(T^n)$, obtemos

$$P(T^n) = a_m T^{mn} + a_{m-1} T^{mn-n} + \dots + a_1 T^n + a_0 = R(T) = 0,$$

isto é, T é raiz de $R(x)$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, $T^n \notin \overline{\mathbb{Q}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Suponhamos $T^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e considere, sem perda de generalidade, $q > 0$. Assim, existe $K \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $T^{\frac{p}{q}} = K$. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao expoente q , obtemos:

$$(T^{\frac{p}{q}})^q = K^q \Leftrightarrow T^p = K^q.$$

Todavia, pelo item (4) da proposição anterior, $K^q \in \overline{\mathbb{Q}}$, e pelo item (4) desta proposição, $T^p \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pois p é um inteiro positivo, uma contradição. Portanto, $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. □

Corolário 2.1. *Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Então $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$ e consideremos, sem perda de generalidade, $q > 1$. Pelo item (4) da Proposição 2.3

$$(\alpha^{\frac{p}{q}})^q \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

Entretanto, pelo item (4) da Proposição 2.2

$$(\alpha^{\frac{p}{q}})^q = \alpha^p \in \overline{\mathbb{Q}},$$

que é uma contradição. Portanto, $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$. □

3 Potências transcendententes

Em 1900, o matemático David Hilbert listou, durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos, 23 problemas, todos sem solução até aquela data. O sétimo problema questionava a respeito da natureza do número a^b , quando a e b são algébricos, com a não nulo e diferente de 1 e b não pertencente aos racionais. Essa questão foi respondida em 1930, quando R. Kuzmin e C. L. Siegel provaram, de maneira independente, casos particulares: qualquer número da forma $a^{\sqrt{n}}$ é transcendente, quando a é um algébrico não nulo e diferente de 1, e n é um inteiro positivo não quadrado.

Quatro anos depois, também de maneira independente, os matemáticos Alexander Gelfond e Theodor Schneider responderam completamente ao sétimo problema de Hilbert. Essa resposta tornou-se conhecida como o "Teorema de Gelfond-Schneider", enunciado a seguir.

Teorema 3.1. *(Teorema de Gelfond-Schneider) Se $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, com $\alpha \notin \{0, 1\}$ e $\beta \notin \mathbb{Q}$, então $\alpha^\beta \notin \overline{\mathbb{Q}}$.*

Segue imediatamente desse resultado que $2^{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{5}^{\sqrt[3]{3}}$, por exemplo, são números transcendententes. A demonstração deste resultado foge do escopo deste artigo, mas pode ser encontrada em [3] (p. 177).

3.1 Natureza das potências n^T , com $n \in \mathbb{N}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$

Vamos iniciar esta seção com o seguinte questionamento:

Questão 1: Dados $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, sob quais condições $n^T \notin \overline{\mathbb{Q}}$?

3.1.1 A equação $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Para responder tal questão, vamos analisar as soluções da equação $x^n = n^x$, para $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal equação admite a solução $x = n$, que trataremos como *solução trivial*. No que segue, o lema abaixo será uma ferramenta essencial.

Lema 3.2. (Teorema de Bolzano) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos $f(a) < 0 < f(b)$, e seja $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$. Como $a \in A$, então $A \neq \emptyset$. Além disso, A é limitado, pois $A \subset [a, b]$ e daí, A possui um supremo c , isto é, $\sup A = c$.

Temos $f(a) < 0$, daí, a continuidade de f implica que existe $\delta > 0$ tal que f ainda é negativa para todo $x \in (a, a + \delta)$, donde segue que $c \geq a + \delta$.

Suponhamos que tivéssemos $f(c) < 0$. Então $c < b$ (uma vez que $f(b) > 0$) e existiria $\delta > 0$ tal que f seria negativa para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Mas daí teríamos $f(x) < 0$ para algum $x \in (c, b)$, contradizendo o fato de que c é o supremo de A .

Por fim, suponha que $f(c) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ em $(c - \delta, c + \delta)$, donde seguiria que $\sup A \leq c - \delta$, ou $\sup A \geq c + \delta$, contradizendo (em ambos os casos), o fato de c ser o supremo de A . Logo, $f(c) = 0$, como queríamos demonstrar. \square

Consideremos a função $f(x) = x^n - n^x$. Inicialmente, vejamos, com mais detalhes, as soluções para $n = 2$, isto é, $f(x) = x^2 - 2^x$.

Note que

$$f(-1) = (-1)^2 - 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$$

e

$$f(0) = 0^2 - 2^0 = -1 < 0.$$

Portanto, pelo Lema 3.2, como $f(-1)f(0) < 0$, existe uma raiz entre os números -1 e 0.

Doravante, analisemos as soluções quando $n = 3$, isto é, $f(x) = x^3 - 3^x$. Para $n = 3$ não há raízes negativas (será demonstrado mais adiante), mas existe uma raiz entre 0

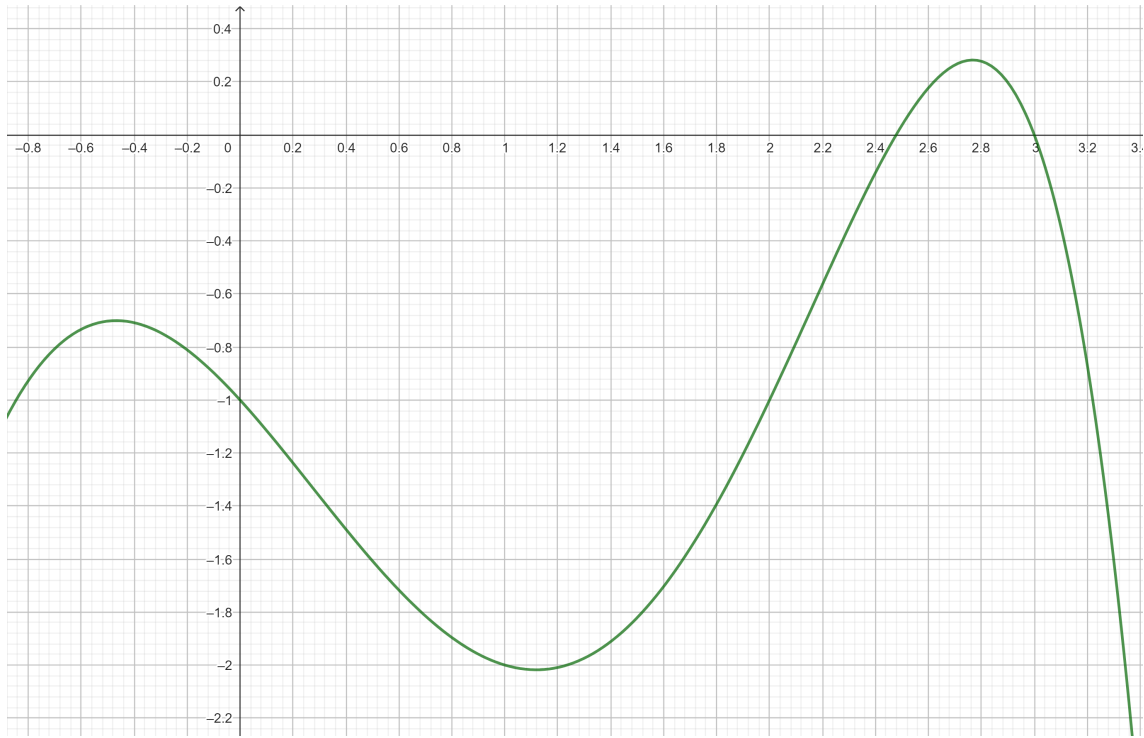


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3^x$.

e 3, que é o número 2,4780526802882985.... Podemos visualizar tal fato a partir do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3^x$ exibido a seguir:

Por fim, destacaremos dois casos de soluções inteiras não triviais: para $n = 2$ temos a solução $x = 4$ e para $n = 4$ temos a solução $x = 2$. Isto é, 4 é solução de $x^2 = 2^x$ e 2 é solução de $x^4 = 4^x$. Denotaremos tais soluções por *casos especiais*.

No que segue, mostraremos o caso geral.

Proposição 3.1. *Toda equação do tipo $x^n = n^x$ tem solução além da solução trivial.*

Como os casos $n = 2$ e $n = 3$ já foram expostos anteriormente, vamos provar tal afirmação para todo $n > 3$. Para tanto, faremos dois casos para analisar as soluções negativas: quando n for um número par e quando for um número ímpar.

Dada a função $f(x) = x^n - n^x$, consideremos n um número natural par qualquer, maior que 3. Da mesma maneira que fizemos anteriormente, temos

$$f(-1) = (-1)^n - n^{-1} = 1 - \frac{1}{n} > 0$$

e

$$f(0) = 0^n - n^0 = 0 - 1 < 0,$$

portanto, toda equação $x^n = n^x$ possui solução entre -1 e 0, para todo $n \in \mathbb{N}$, com n maior que 3 e par.

Agora, seja $n \geq 3$ um número ímpar. Nesse caso, a função não admite raízes negativas. De fato, note que, se $x < 0$ e n é ímpar, então o termo $x^n < 0$. E ainda, $n^x = \frac{1}{n^{-x}} > 0$. Assim, $f(x) = x^n - \frac{1}{n^{-x}} < 0$, qualquer que seja $x < 0$ e n ímpar, maior ou igual a 3.

Para finalizar, provaremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$, a função $f(x) = x^n - n^x$ possui pelo menos uma raiz entre 0 e 3.

Vimos que $f(0) = -1, \forall n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$. Para concluir a demonstração, basta mostrar que $f(3) > 0$ e aplicar o Lema 3.2.

Mostrar que

$$f(3) = 3^n - n^3 > 0, \tag{3.1}$$

é equivalente a mostrar que $3^n > n^3$, qualquer que seja $n > 3$.

Afirmção 1: Dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $3^n > n^3$, qualquer que seja $n > 3$.

Demonstração. Vamos provar tal resultado por indução. Veja que, para $n = 4$, temos $81 = 3^4 > 4^3 = 64$. Agora, suponha que existe algum $n > 4$ tal que $3^n > n^3$. Daí, $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$, e pela hipótese de indução, $3^n \cdot 3 > 3n^3$. Para concluir a demonstração, basta mostrar que $3n^3 > (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, isto é, $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. De fato,

$$n > 4 \quad \Rightarrow \quad n^3 > 3n^2 \quad \text{e} \quad n^3 > 3n + 1,$$

isto é, as duas últimas desigualdades mostram que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. Logo, concluímos que $3^{n+1} > (n+1)^3$ e, pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos a prova da afirmação.

Assim, $f(3) > 0$ implica que $f(0)f(3) < 0$ e, por (3.2), as funções $f(x) = x^n - n^x$ admitem uma raiz entre 0 e 3, qualquer que seja n natural maior que 3.

□

Diante do que foi discutido concluímos que, além da solução trivial:

1. se n é par, a equação possui pelo menos 2 soluções (uma positiva e uma negativa);
2. se n é ímpar, a equação possui pelo menos 1 solução positiva.

Lema 3.3. (*Irracionalidade das soluções*): *Todas as soluções não triviais de uma equação da forma $x^n = n^x$ são irracionais, a menos dos casos especiais em $n \in \{2, 4\}$.*

Demonstração. Suponha que $x^n = n^x$ admite apenas soluções racionais. Segue disso que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = n^{\frac{p}{q}}.$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao expoente q , obtemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{nq} = n^p.$$

Vamos considerar dois casos:

1) Seja $p > 0$. Como $n^p \in \mathbb{N}$, a última igualdade indica que $\frac{p}{q}$ é inteiro, logo, temos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, o que implica que q divide p , contradizendo a hipótese.

2) Agora, suponhamos $p < 0$. Temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{nq} = n^p \Rightarrow n^{-p} = \left(\frac{q}{p}\right)^{nq}.$$

Daí, pelo mesmo argumento utilizado no item (1), concluímos que tal afirmação também contradiz a hipótese de que $\text{mdc}(p, q) = 1$. Portanto, as soluções da equação $x^n = n^x$, a menos da solução trivial e dos casos especiais, são irracionais, para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 3.4. (*Transcendência das soluções*): *Toda solução das equações $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, a menos da solução trivial, é transcendente, salvo os casos especiais descritos anteriormente para $n = 2$ e $n = 4$.*

Demonstração. Seja x_0 uma solução não trivial. Suponha, por absurdo, que x_0 é algébrico. Pelo Lema 3.3 e pelo teorema de Gelfond-Schneider, n^{x_0} é transcendente e, por outro lado, $n^{x_0} = x_0^n$ seria algébrico, gerando uma contradição. Logo, x_0 é transcendente. \square

A seguir, apresentaremos uma consequência dos resultados expostos sobre a equação $x^n = n^x$.

Corolário 3.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existe $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$ tal que n^T é transcendente.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.4, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, existe $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $T^n = n^T$. Assim, pelo item (iv) da Proposição 2.3, T^n é transcendente, e portanto n^T também é transcendente, como queríamos demonstrar. \square

3.2 Algumas considerações sobre as potências n^T

Diante do que foi discutido na seção anterior, obtemos uma resposta para a **questão 1** apresentada no início da subseção 3.1: um critério de transcendência.

Teorema 3.5. (Critério de transcendência): *Dados $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, se $n^T = T^n$ então n^T é transcendente.*

Pelo Corolário 3.1, existem infinitos transcendentess dessa forma. Entretanto, essa condição não é única. Tomemos o transcendente $\frac{\log 3}{\log 2}$ ¹. O número $2^{\frac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}} = 3^{\sqrt{2}}$ é transcendente, mas temos $2^{\frac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}} \neq \left(\frac{\sqrt{2}\log 3}{\log 2}\right)^2$. Além disso, nem todo número da forma n^T nas condições apresentadas é transcendente, como por exemplo, o número $2^{\frac{\log 3}{\log 2}} = 3$.

Diante disso, nada pode ser concluído sobre os números 2^e e 2^π , uma vez que $2^e \neq e^2$ e $2^\pi \neq \pi^2$. Mais ainda, nenhum dos números n^e e n^π , com $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tem sua transcendência confirmada pelo critério aqui estabelecido.

Note que, para $n = 3$, $3^e \neq e^3$ e $3^\pi \neq \pi^3$. Da mesma forma, para $n = 4$, temos $4^e \neq e^4$ e $4^\pi \neq \pi^4$. No entanto, quando $n > 4$, se x_0 é uma solução de $x^n = n^x$, esta está contida no intervalo $(-1, 2)$. Para mostrar tal fato, basta utilizar o Lema 3.2 e mostrar que $f(0)f(2) < 0$ dada a função $f(x) = x^n - n^x$ com $n > 4$.

Dessa forma, garantimos a existência de solução irracional da equação $x^n = n^x$ no intervalo $(-1, 2)$ mas não garantimos que não existe outras soluções irracionais de tal equação fora do intervalo $(-1, 2)$. Em [8], é mostrado que para $n \geq 4$ as soluções irracionais da equação $n^x = x^n$ são no máximo duas e ambas estão no intervalo $(-1, 2)$.

Vimos que $f(0) < 0$, portanto, basta mostrar que $f(2) = 2^n - n^2 > 0$. Veja que se tomarmos $n = 5$, a desigualdade é verdadeira: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$. Suponha que existe algum $n > 4$ tal que a desigualdade seja válida. Temos

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2,$$

e pela a hipótese

$$2^n \cdot 2 > 2n^2.$$

Então, basta mostrar que $2n^2 > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, isto é, $n^2 > 2n + 1$. Como $n > 4$, temos $n^2 > 4n = 2n + 2n > 2n + 1$. Logo, $2n^2 > (n+1)^2$, e pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que $2^n - n^2 > 0$. Assim, $f(2) > 0$ e isso verifica o que queríamos.

¹A demonstração da transcendência desse número é feita em [3](p.121)

4 Considerações finais

A partir do conhecimento sobre os conceitos iniciais da teoria dos números transcendententes e da motivação do problema de encontrar todas as soluções da equação $x^2 = 2^x$, apresentamos a relação entre as soluções das equações da forma $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, e os números transcendententes. Para tal feito, foram expostas as definições dos conjuntos dos números algébricos e dos números transcendententes, bem como suas propriedades aritméticas. Além disso, uma ferramenta essencial para a construção dos resultados é Teorema de Gelfond-Schneider, que determina a transcendência de potências de base e expoente algébricos.

Com isso, definimos, para as equações $x^n = n^x$, as soluções $x = n$ como *soluções triviais* e mostramos que, além destas, toda equação da forma aqui mencionada possui solução. No que segue, provamos que todas as soluções dessas equações, além das triviais e casos especiais mencionados, são transcendententes. Em decorrência disso, definimos um critério de transcendência para potências da forma n^T com T transcendente e $n > 1$.

Referências

- [1] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Números Irracionais e Transcendententes*. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [2] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] Marques, Diego. *Teoria dos Números Transcendententes*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] Muniz Neto, Antonio Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- [5] Niven, Ivan. *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] Ripoll, Jaime Bruck; Ripoll, Cydara Cavedon e Silveira, José Francisco Porto da. *Números Racionais, Reais e Complexos*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.
- [7] TORRES, Mário Sérgio Rebouças. *Números algébricos e transcendententes* (dissertação de mestrado). UFC, Fortaleza, 2017.
- [8] Pinto, Ronald Simões de Mattos e Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. **Um estudo sobre as soluções reais da equação $a^x = x^a$ onde $a \geq 2$ é um número**

inteiro. Disponível em https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2020/09/art2_Artigo_RMU_revisado_2020_DOI-1.pdf.

Recebido em 12 de Dezembro de 2024

Revisado em 21 de Janeiro de 2025

Aceito em 04 de Fevereiro de 2025