

ANÁLISE DA ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE UM SISTEMA DE BRESSE COM DOIS AMORTECIMENTOS TÉRMICOS BASEADOS NA LEI DE CATTANEO

ANALYSIS OF THE EXPONENTIAL STABILITY OF A BRESSE SYSTEM WITH TWO THERMAL DAMPINGS BASED ON CATTANEO'S LAW

Pedro Roberto de Lima

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

pedrorobertodelima@ufrj.br

Joice Leite Bastos de Barros

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

joicebarros8447@gmail.com

Handled by A. Viana

Resumo

Neste trabalho, estudamos um sistema de Bresse termoelástico com amortecimento térmico baseado na lei de Cattaneo agindo tanto na força de cisalhamento quanto no momento fletor. A novidade da análise em relação à literatura existente reside nas condições de fronteira adotadas. Inicialmente, provamos existência e unicidade de solução. Em seguida, provamos o decaimento exponencial da energia desde que certa condição (já conhecida na literatura para este tipo de sistema) seja imposta sobre os parâmetros estruturais. Finalmente, explorando as novas condições de fronteira aqui adotadas, introduzimos uma nova condição suficiente para o decaimento não exponencial da energia.

Palavras-chave: Vigas curvas; Lei de Cattaneo; Estabilidade exponencial; Decaimento não exponencial; Termoelasticidade linear.

Abstract

In this work, we study a thermoelastic Bresse system with thermal damping based on Cattaneo's law acting on both the shear force and the bending moment. The novelty of the analysis compared to the existing literature lies in the adopted boundary conditions. Initially, we prove existence and uniqueness of solution. Next, we prove the exponential decay of the energy provided that a certain condition (already known in the literature for this type of system) is imposed on the structural parameters. Finally, by exploiting the new boundary conditions adopted here, we introduce a new sufficient condition for non-exponential decay of the energy.

Keywords: Curved beams; Cattaneo's law; Exponential stability; Non-exponential decay; Linear thermoelasticity.

1 Introdução

Este artigo tem origem em um projeto de iniciação científica que consistiu no estudo de um modelo matemático de viga com foco na boa colocação e na estabilidade exponencial. O estudo deste tipo de problema requer o emprego de ferramentas avançadas para estudantes de graduação. Entretanto, em determinada etapa da argumentação, demonstrar que o modelo não possui estabilidade exponencial se reduz a demonstrar que um determinado limite no infinito é infinito ou real não nulo; e esse limite é dado em termos de uma razão de determinantes podendo, portanto, ser estudado por meio das ferramentas básicas do Cálculo e da Álgebra Linear. É o estudo desse limite que foi explorado pela estudante. Além disso, ela realizou estudos complementares que lhe forneceram as noções básicas do contexto em que se insere o modelo analisado. A parte avançada da análise ficou sob a responsabilidade do orientador do projeto. Nesse sentido, o projeto abriu espaço para uma bem-sucedida parceria entre professor e estudante que possibilitou, inclusive, a obtenção de resultados de pesquisa originais, os quais serão expostos a seguir.

1.1 Apresentação do modelo estudado

O **Sistema de Bresse** é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga arqueada e, inicialmente, foi desenvolvido pelo engenheiro civil francês Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883). Bresse se especializou em estudos de mecânica aplicada e suas contribuições lhe renderam a homenagem de ser um dos 72 cientistas franceses com o nome gravado no primeiro andar da torre Eiffel ([7], p. 94-95). Quando Bresse estudou pela primeira vez o sistema que hoje leva seu nome ([2],

p. 122-128), ele considerou apenas as deformações mecânicas, ou seja, era um modelo sem acoplamento térmico, também chamado de **isotérmico**, que desconsidera a interferência da temperatura, eliminando assim as equações do calor. Contudo, de maneira geral, muitos materiais sofrem algum tipo de influência da temperatura. Assim, com o passar dos anos, despertou-se o interesse em estudos de **modelos termoelásticos** que combinam a deformação mecânica com a influência da temperatura. O foco do presente estudo está centralizado em um modelo deste tipo, formulado no contexto da teoria clássica da elasticidade linear. Nesse sentido, a respeito da composição da viga, algumas das principais hipóteses do modelo são as seguintes ([14], p. 12-13):

- O material é **isotrópico** (as propriedades físicas, como coeficiente de dilatação térmica, são as mesmas em todas as direções a partir de um dado ponto);
- O material é **homogêneo** (todos os parâmetros físicos associados ao material, como a densidade, são constantes em relação à posição, ou seja, apresentam o mesmo valor numérico em cada ponto da viga);
- O material é **linearmente elástico** (em analogia a uma mola, para pequenas deformações, a força restauradora exercida é proporcional ao tamanho da deformação).

Estas propriedades implicam, por exemplo, que em qualquer direção a partir de qualquer ponto da viga, as suas propriedades elásticas e térmicas são as mesmas. Além disso, o modelo considera que em cada instante de tempo $t \geq 0$ e cada ponto $x \in [0, \ell]$ da viga, os comportamentos mecânicos são medidos por três funções (veja a Figura 1):

- $\varphi = \varphi(t, x)$ representa o **deslocamento vertical** (o quanto cada ponto na linha de referência se desloca para cima ou para baixo);
- $\psi = \psi(t, x)$ representa o **ângulo de rotação da seção transversal** (o quanto cada seção transversal gira);
- $w = w(t, x)$ representa o **deslocamento horizontal** (o quanto cada ponto na linha de referência se desloca para a esquerda ou para a direita).

Cabe destacar, também, que a viga é considerada fina com seção transversal duplamente simétrica (isto é, a metade superior é igual à metade inferior e a metade esquerda é igual à metade direita como ocorre, por exemplo, com seções retangulares e circulares).

No contexto do sistema de Bresse, a maneira como a temperatura interfere nas deformações que a viga sofre vem associada à ação de três tipos básicos de forças:

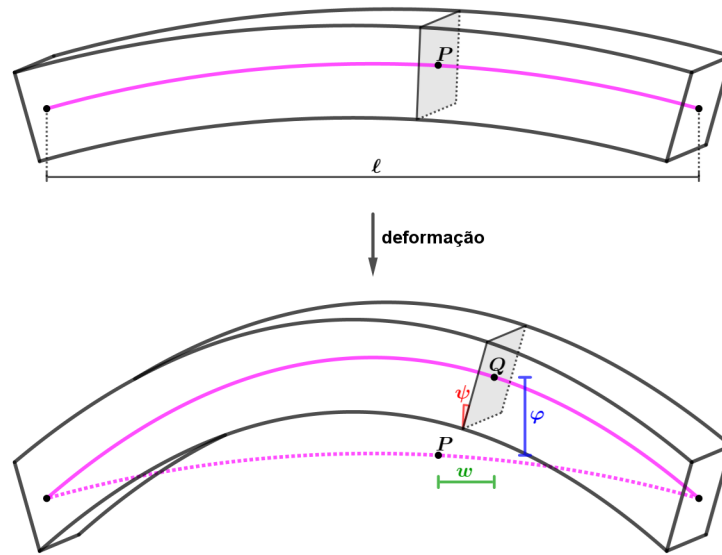


Figura 1: Após a deformação, um ponto P da linha de referência ocupa a posição Q .

- Forças que tendem a fazer com que a viga seja “cortada” (ou “rasgada”). Quando a variação de temperatura interfere nesse tipo de força, dizemos que o sistema possui efeitos térmicos agindo na **força de cisalhamento**;
- Forças que tendem a fazer com que a viga seja “dobrada”. Quando a variação de temperatura interfere nesse tipo de força, dizemos que o sistema possui efeitos térmicos agindo no **momento fletor**;
- Forças que tendem a fazer com que a viga seja “esticada” ou “comprimida”. Quando a variação de temperatura interfere nesse tipo de força, dizemos que o sistema possui efeitos térmicos agindo na **força axial**.

No sistema que estudaremos, iremos considerar uma variação de temperatura Θ com fluxo g agindo na força axial e uma variação de temperatura ϑ com fluxo p agindo no momento fletor, ambas modeladas pela Lei de Cattaneo de condução do calor. Assim sendo, conforme deduzido em [8, 6], o modelo que estudaremos é dado pelo seguinte

sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - [k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma_1 \Theta]_x - lk_0(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - [b\psi_x - \gamma_2 \vartheta]_x + [k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma_1 \Theta] = 0, \\ \rho_3 w_{tt} - [k_0(w_x - l\varphi)]_x + l[k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma_1 \Theta] = 0, \\ \Theta_t + k_1 g_x + m_1(\varphi_x + \psi + lw)_t = 0, \\ \tau_1 g_t + \delta_1 g + \Theta_x = 0, \\ \vartheta_t + k_2 p_x + m_2 \psi_{xt} = 0, \\ \tau_2 p_t + \delta_2 p + \vartheta_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $k(\varphi_x + \psi + lw)$ representa a força de cisalhamento, $b\psi_x$ representa o momento fletor e $k_0(w_x - l\varphi)$ representa a força axial. Todos os coeficientes são considerados constantes positivas; tais constantes são chamadas de **parâmetros estruturais**, pois encontram-se associadas à forma geométrica e à composição física da viga (por exemplo: l é a curvatura inicial e ρ_1 é a densidade multiplicada pela área da seção transversal).

Neste estudo, o sistema (1.1) será complementado com condições de fronteira

$$\begin{cases} \varphi = \psi_x = w_x = g = \vartheta = 0, & \text{para } t \geq 0 \text{ e } x = 0, \\ \varphi_x = \psi = w = \Theta = p = 0, & \text{para } t \geq 0 \text{ e } x = \ell, \end{cases} \quad (1.2)$$

e condições iniciais

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0, & \psi &= \psi_0, & w &= w_0, & \Theta &= \Theta_0, & \vartheta &= \vartheta_0 \\ \varphi_t &= \varphi_1, & \psi_t &= \psi_1, & w_t &= w_1, & g &= g_0, & p &= p_0 \end{aligned} \right\} \text{ para } t = 0 \text{ e } x \in (0, \ell). \quad (1.3)$$

Observação 1.1. Do ponto de vista físico, as condições de fronteira (1.2) possuem a seguinte interpretação:

- Na extremidade esquerda ($x = 0$): não há deslocamento vertical, momento fletor, força axial, fluxo g nem variação de temperatura ϑ .
- Na extremidade direita ($x = \ell$): não há rotação da seção transversal, deslocamento horizontal, força de cisalhamento, fluxo p nem variação de temperatura Θ .

1.2 Apresentação dos resultados obtidos

Para simplificar a notação, a partir dos coeficientes do sistema (1.1), vamos definir as seguintes constantes:

$$L_1 = \left(\tau_1 - k_1 \frac{\rho_3}{k_0} \right) \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) + \gamma_1 m_1 \tau_1, \quad (1.4)$$

$$L_2 = \left(\tau_2 - k_2 \frac{\rho_3}{k_0} \right) \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) + \gamma_2 m_2 \tau_2 \quad (1.5)$$

e

$$L_3 = (k + k_0)^2 \left(\tau_1 - k_1 \frac{\rho_3}{k_0} \right) - \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \tau_1 \gamma_1 m_1 + 2(k + k_0) \gamma_1 m_1 \tau_1. \quad (1.6)$$

A novidade de nossa análise em relação à literatura existente reside nas condições de fronteira (1.2) que, apesar de já terem sido usadas em sistemas similares, até onde sabemos, ainda não tinha sido estudada em conexão com o sistema (1.1). De fato, o modelo (1.1) foi estudado pela primeira vez com uma condição de fronteira distinta em [4], onde os seguintes resultados foram provados no contexto da teoria de semigrupos de operadores lineares:

(a) Existência e unicidade de solução.

(b) Se $L_1 = 0$, então a energia

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell & \left(\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_3 |w_t|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2 + b |\psi_x|^2 \right. \\ & + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + \frac{\gamma_1}{m_1} |\Theta|^2 + \frac{\gamma_1 k_1 \tau_1}{m_1} |g|^2 + \frac{\gamma_2}{m_2} |\vartheta|^2 \\ & \left. + \frac{\gamma_2 k_2 \tau_2}{m_2} |p|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

possui **decaimento exponencial**, isto é, existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que

$$E(t) \leq C e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)$$

Esses mesmos resultados dos itens (a) e (b) serão estendidos para a nossa nova condição de fronteira (1.2) na Seção 2 e na Seção 3, respectivamente. Nesse contexto, surge a seguinte pergunta: se a condição $L_1 = 0$ não for satisfeita, o decaimento deixa de ser exponencial? Tendo em vista as técnicas conhecidas usuais, a condição de fronteira adotada em [4] não nos permite obter uma resposta para essa pergunta (veja a Observação 4.2). Porém, para a nossa condição (1.2), foi possível obter uma resposta parcial. Especificamente, na Seção 4 provamos o seguinte resultado:

(c) Se $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ e $L_3 \neq 0$, então a energia não decai exponencialmente.

Nesse sentido, nosso estudo não só estende os resultados de [4] para uma nova condição de fronteira como também dá passos em direção a uma caracterização completa da estabilidade exponencial do sistema para essa nova condição – o que, até onde sabemos, ainda não foi feito na literatura existente para o sistema que estamos considerando.

Observação 1.2. Nossos resultados fornecem uma condição suficiente para o decaimento exponencial e uma condição suficiente para a falta de decaimento exponencial. A referida caracterização completa seria atingida se fosse demonstrado que alguma dessas condições (ou alguma variante delas) também é necessária – o que ainda é um problema aberto para o modelo (1.1)-(1.3). Exemplos do que poderia ser uma caracterização completa são dados pelas seguintes conjecturas (mutuamente excludentes):

Conjectura 1.3. A energia (1.7) associada ao problema (1.1)-(1.3) decai exponencialmente se, e somente se, $L_1 = 0$.

Conjectura 1.4. A energia (1.7) associada ao problema (1.1)-(1.3) decai exponencialmente se, e somente se, $L_1 = 0$ ou $L_2 = 0$.

Para provar a Conjectura 1.3, seria necessário refinar a prova do Teorema 4.1 eliminando a necessidade de usar $L_2 \neq 0$ e $L_3 \neq 0$. Para provar a Conjectura 1.4, seria necessário refinar a prova do Teorema 4.1 eliminando a necessidade de usar $L_3 \neq 0$ e estender a prova do Teorema 3.3 mostrando que, assim como $L_1 = 0$, a igualdade $L_2 = 0$ também produz decaimento exponencial.

Observação 1.5. Caracterizações completas do decaimento exponencial de sistemas de Bresse com amortecimento térmico baseado na lei de Cattaneo agindo na força de cisalhamento são raras na literatura existente. Entretanto, um resultado desse tipo para uma variante do sistema (1.1) sem amortecimento no momento fletor pode ser encontrado em [1], onde uma condição de fronteira similar à (1.2) foi utilizada.

Observação 1.6. O fato de que a possibilidade de provar falta de decaimento exponencial depende das condições de fronteira é bem conhecido e bastante comum no contexto dos modelos de vigas termoelásticas, estando presente desde os trabalhos pioneiros [12, 9] (onde a caracterização completa foi provada apenas para condições de fronteira específicas) e sendo replicado em uma grande variedade de trabalhos posteriores.

Observação 1.7. Note que a condição no item (c) para a falta de decaimento exponencial é satisfeita, por exemplo, se

$$\frac{b}{\rho_2} = \frac{k_0}{\rho_3} = \frac{k}{\rho_1} = \frac{k_1}{\tau_1}. \quad (1.9)$$

Essa condição distingue uma classe de sistemas, com todas as equações mecânicas possuindo a mesma velocidade de onda, para os quais o decaimento exponencial não vale.

Esse resultado é compatível com o fato conhecido (veja, por exemplo, o Remark 3.12 em [3]) de que a energia de certos sistemas de Bresse baseados na lei de Cattaneo não decai de forma exponencial quando determinadas equações mecânicas possuem velocidades de onda iguais. Se a condição (1.9) pode ser enfraquecida é um problema que depende da caracterização completa (ainda não obtida, conforme já discutido na Observação 1.2).

2 Formulação abstrata, existência e unicidade

Por simplicidade, em tudo o que segue, os espaços de Lebesgue e Sobolev usuais $L^2(0, \ell)$, $H_0^1(0, \ell)$, $H^1(0, \ell)$ e $H^2(0, \ell)$ serão representados, respectivamente, por L^2 , H_0^1 , H^1 e H^2 .

Seja $\tilde{H}_p^1$ o espaço de Hilbert definido, para $p = 0$ ou $p = \ell$, por

$$\tilde{H}_p^1 = \{u \in H^1 \mid u(p) = 0\}$$

com norma

$$\|u\|_{\tilde{H}_p^1} = \|u_x\|_{L^2}. \quad (2.1)$$

Defina

$$\mathcal{H} = \tilde{H}_0^1 \times L^2 \times [\tilde{H}_\ell^1 \times L^2]^2 \times [L^2]^4$$

com norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_3 \|W\|_{L^2}^2 + k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\quad + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_1}{m_1} \|\Theta\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_1 k_1 \tau_1}{m_1} \|g\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_2}{m_2} \|\vartheta\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{\gamma_2 k_2 \tau_2}{m_2} \|p\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \Theta, g, \vartheta, p)$.

Proposição 2.1 ([4], Remark 5.1). *Se*

$$l\ell \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

então $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert no qual a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$ definida por

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^1}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{\tilde{H}_\ell^1}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|w\|_{\tilde{H}_\ell^1}^2 + \|W\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \|\Theta\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{L^2}^2 + \|p\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observação 2.2. Em tudo o que segue, suporemos válida a condição (2.3) sem, entretanto, voltar a fazer menção explícita a ela. A depender da condição de fronteira utilizada, esse tipo de hipótese é comum no contexto dos sistemas de Bresse para garantir que a norma realmente é induzida por um produto interno (estando presente desde o trabalho pioneiro [9]).

Escrevendo $J_p = \{u \in H^2(0, \ell) \mid u_x(p) = 0\}$ para $p = 0$ e $p = \ell$, defina também o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ colocando

$$D(\mathcal{A}) = (\tilde{H}_0^1 \cap J_\ell) \times \tilde{H}_0^1 \times [(\tilde{H}_\ell^1 \cap J_0) \times \tilde{H}_\ell^1]^2 \times \tilde{H}_\ell^1 \times [\tilde{H}_0^1]^2 \times \tilde{H}_\ell^1$$

e

$$\mathcal{A}U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{\gamma_1}{\rho_1}\Theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\vartheta_x + \frac{\gamma_1}{\rho_2}\Theta \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_3}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_3}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{l\gamma_1}{\rho_3}\Theta \\ -k_1 g_x - m_1(\Phi_x + \Psi + lW) \\ -\frac{\delta_1}{\tau_1}g - \frac{1}{\tau_1}\Theta_x \\ -k_2 p_x - m_2 \Psi_x \\ -\frac{\delta_2}{\tau_2}p - \frac{1}{\tau_2}\vartheta_x \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Sob essas notações, o problema (1.1)-(1.3) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), & t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $U(t) = (\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t), w(t), w_t(t), \Theta(t), g(t), \vartheta(t), p(t))$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \Theta_0, g_0, \vartheta_0, p_0)$.

Observação 2.3. Em termos das notações estabelecidas, a energia definida em (1.7) satisfaz $E(t) = \frac{1}{2}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2$ de modo que a desigualdade (1.8) que caracteriza o decaimento exponencial equivale à desigualdade (3.2) que provaremos.

A seguir, provaremos algumas propriedades do operador $\mathcal{A}$ e finalizaremos com o principal resultado desta seção. A notação $\rho(\mathcal{A})$ representará o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$.

Proposição 2.4. *Se $\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$, então λ é um autovalor de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Basta provar que o operador inclusão $\iota : (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}) \rightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ definido por $\iota(U) = U$ é compacto (veja a Proposição 4.25 e o Corolário 1.19 em [5]). Em outras palavras, basta mostrar que se $U^{(n)}$ é limitada em $(D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})})$, então $\iota(U^{(n)}) = U^{(n)}$ possui uma subsequência convergente em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Seja, então, $U^{(n)}$ uma sequência limitada em $(D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})})$. Uma verificação direta usando a forma (2.5) do operador $\mathcal{A}$ mostra que $U^{(n)}$ também é limitada no espaço $\mathcal{G} = (H^2 \cap \tilde{H}_0^1) \times H^1 \times [(H^2 \cap \tilde{H}_\ell^1) \times H^1]^2 \times [H^1]^4$ (relativamente a sua norma usual). Como $\mathcal{G}$ possui imersão compacta em $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$, segue que $U^{(n)}$ possui uma subsequência que converge em $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$. Como $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, segue que essa subsequência também converge em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$. $\square$

Proposição 2.5. $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Suponha que $0 \notin \rho(\mathcal{A})$. Então, pela Proposição 2.4, existe $U \neq 0$ em $D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = 0. \quad (2.7)$$

Disso, em vista de (2.5), decorre imediatamente que $\Phi = \Psi = W = 0$. Usando isso na sétima e na nona componentes de (2.7), concluímos que $g = p = 0$. Daí, pela oitava e décima componentes de (2.7), segue que $\Theta = \vartheta = 0$. Consequentemente, a segunda, a quarta e a sexta componentes de (2.7) implicam que

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando essas equações por φ , ψ e w , respectivamente, integrando sobre $(0, \ell)$, e fazendo integração por partes, segue que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 = 0.$$

Assim, usando (2.2), concluímos que $\|U\|_{\mathcal{H}} = 0$. Absurdo, pois contradiz $U \neq 0$. $\square$

Proposição 2.6. O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo, ou seja, o produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ que induz a norma (2.2) satisfaz a seguinte condição:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall U \in D(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Escrevendo $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \Theta, g, \vartheta, p)$ e $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*, \Theta^*, g^*, \vartheta^*, p^*)$, vemos que $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ é definido por

$$\begin{aligned} (U^*, U)_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi^*, \Phi)_{L^2} + \rho_2(\Psi^*, \Psi)_{L^2} + \rho_3(W^*, W)_{L^2} + k_0(w_x^* - l\varphi^*, w_x - l\varphi)_{L^2} \\ &\quad + k(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*, \varphi_x + \psi + lw)_{L^2} + b(\psi_x^*, \psi_x)_{L^2} + \frac{\gamma_1}{m_1}(\Theta^*, \Theta)_{L^2} \\ &\quad + \frac{\gamma_1 k_1 \tau_1}{m_1}(g^*, g)_{L^2} + \frac{\gamma_2}{m_2}(\vartheta^*, \vartheta)_{L^2} + \frac{\gamma_2 k_2 \tau_2}{m_2}(p^*, p)_{L^2}. \end{aligned}$$

Aplicando essa fórmula com $U \in D(\mathcal{A})$ e $U^* = \mathcal{A}U$ dado por (2.5), integrando por partes e tomando a parte real, segue que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\frac{\gamma_1 \delta_1 k_1}{m_1} \|g\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma_2 \delta_2 k_2}{m_2} \|p\|_{L^2}^2 \leq 0. \quad (2.8)$$

□

Proposição 2.7. $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Tome $\lambda \in i\mathbb{R}$. Suponha que $\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$. Pela Proposição 2.4, λ é um autovalor de $\mathcal{A}$. Assim, $D(\mathcal{A})$ contém um elemento

$$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \Theta, g, \vartheta, p) \neq 0 \quad (2.9)$$

tal que

$$\mathcal{A}U = \lambda U, \quad (2.10)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{\gamma_1}{\rho_1}\Theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\vartheta_x + \frac{\gamma_1}{\rho_2}\Theta \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_3}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_3}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{l\gamma_1}{\rho_3}\Theta \\ -k_1 g_x - m_1(\Phi_x + \Psi + lW) \\ -\frac{\delta_1}{\tau_1}g - \frac{1}{\tau_1}\Theta_x \\ -k_2 p_x - m_2 \Psi_x \\ -\frac{\delta_2}{\tau_2}p - \frac{1}{\tau_2}\vartheta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\varphi \\ \lambda\Phi \\ \lambda\psi \\ \lambda\Psi \\ \lambda w \\ \lambda W \\ \lambda\Theta \\ \lambda g \\ \lambda\vartheta \\ \lambda p \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) em (2.8), concluímos que $g = p = 0$. Substituindo isso na oitava e na décima componentes de (2.11), segue que $\Theta_x = \vartheta_x = 0$ e, portanto, Θ

e ϑ são constantes. Consequentemente, devido às condições de fronteira, $\Theta = \vartheta = 0$. Substituindo isso na sétima e na nona componentes de (2.11), segue que $\Phi_x + \Psi + lW = 0$ e $\Psi_x = 0$. Esse par de igualdades implica que $\Psi = 0$ e $\Phi_x + lW = 0$. Pela Proposição 2.5, sabemos que $\lambda \neq 0$. Assim, usando a primeira, a terceira e a quinta componentes de (2.11), concluímos que

$$\psi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_x + lw = 0. \quad (2.12)$$

Substituindo isso na segunda e na sexta componentes de (2.11), e usando a primeira e a quinta componentes, segue que $k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 \lambda^2 \varphi$ e $k_0(w_x - l\varphi)_x = \rho_3 \lambda^2 w$. Resulta disso que $\rho_1 \varphi_x = \rho_3 lw$. Combinando isso com (2.12), obtemos $\varphi_x = 0$ e $w = 0$. Assim, também temos $\varphi = 0$. Substituindo as duas últimas igualdades na primeira e na quinta componentes de (2.11), obtemos $\Phi = W = 0$. Isso mostra que $U = 0$. Absurdo, pois contradiz (2.9). $\square$

Teorema 2.8 (Existência e unicidade). *O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(e^{t\mathcal{A}})_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{H}$. Portanto, o problema (2.6) possui:*

- uma única solução clássica $U \in C([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H})$ para cada dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$, e
- uma única solução enfraquecida $U \in C([0, \infty); \mathcal{H})$ para cada dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}$,

as quais são dadas por $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$.

Demonstração. O fato de que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal resulta imediatamente da Proposição 2.5 e da Proposição 2.6 (veja o Teorema 2.4 em [11]). A asserção sobre existência e unicidade resulta imediatamente da teoria clássica de semigrupos de operadores lineares (veja o Teorema 2.3 em [13]). $\square$

3 Análise da estabilidade exponencial

Nesta seção, usaremos os seguintes dois lemas já conhecidos (note-se que a versão com $|\beta_n| \rightarrow \infty$ que estamos enunciando prova-se com um argumento idêntico ao da versão original que possui $\beta_n \rightarrow \infty$).

Lema 3.1 ([4], Lema 2.1). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam $f^{(n)} \in H^2(0, \ell)$, $F^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}, y^{(n)}, T^{(n)} \in H^1(0, \ell)$ e $h^{(n)}, V^{(n)}, Z^{(n)} \in L^2(0, \ell)$. Suponha que:*

- (β_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $|\beta_n| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

- As sequências $T^{(n)}$, $F^{(n)}$, $V^{(n)}$, $Z^{(n)}$, $\frac{y_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$, $\frac{F_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$ e $\frac{T_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$ são limitadas em $L^2(0, \ell)$.
- $L : [L^2(0, \ell)]^3 \rightarrow L^2(0, \ell)$ é uma transformação linear tal que as sequências $L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})$ e $\frac{[L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})]_x}{\mathbf{i}\beta_n}$ são limitadas em $L^2(0, \ell)$.
- $B : [H^1(0, \ell)]^3 \times L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$ é uma função tal que a sequência $B(f^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}, h^{(n)})$ é limitada em $L^2(0, \ell)$.
- As seguintes convergências são satisfeitas no sentido de $L^2(0, \ell)$, onde os coeficientes ρ , k , γ , κ , m , τ e δ são constantes positivas:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &\rightarrow 0, \\
\rho \mathbf{i}\beta_n F^{(n)} - k[L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})]_x + B(f^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}, h^{(n)}) + \gamma T_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\
\mathbf{i}\beta_n T^{(n)} + \kappa y_x^{(n)} + mL(F_x^{(n)}, V^{(n)}, Z^{(n)}) &\rightarrow 0, \\
\tau \mathbf{i}\beta_n y^{(n)} + \delta y^{(n)} + T_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\
\mathbf{i}\beta_n L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}) - L(F_x^{(n)}, V^{(n)}, Z^{(n)}) &\rightarrow 0, \\
\frac{1}{\mathbf{i}\beta_n} F^{(n)} \overline{T^{(n)}} \Big|_0^\ell &\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Então, $T^{(n)} \rightarrow 0$, $L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}) \rightarrow 0$ e $F^{(n)} \rightarrow 0$.

Lema 3.2 ([4], Lema 2.2). Para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam $f^{(n)}, z^{(n)} \in H^2(0, \ell)$, $F^{(n)}, T^{(n)}$, $Z^{(n)}, v^{(n)}, y^{(n)} \in H^1(0, \ell)$ e $V^{(n)}, h^{(n)} \in L^2(0, \ell)$. Suponha que:

- (β_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $|\beta_n| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.
- As sequências $T^{(n)}$, $F^{(n)}$, $V^{(n)}$, $Z^{(n)}$, $\frac{y_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$, $\frac{Z_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$ e $\frac{T_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n}$ são limitadas em $L^2(0, \ell)$.
- $N : [L^2(0, \ell)]^3 \rightarrow L^2(0, \ell)$ é uma transformação linear, digamos que tendo a forma $N(a, b, c) = n_1 a + n_2 b + n_3 c$, tal que as sequências $N(z_x^{(n)}, v^{(n)}, f^{(n)})$ e $\frac{[N(z_x^{(n)}, v^{(n)}, f^{(n)})]_x}{\mathbf{i}\beta_n}$ são limitadas em $L^2(0, \ell)$.
- $L : [L^2(0, \ell)]^3 \rightarrow L^2(0, \ell)$ é uma transformação linear, digamos que tendo a forma $L(a, b, c) = \ell_1 a + \ell_2 b + \ell_3 c$, tal que a sequência $L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})$ é limitada em $L^2(0, \ell)$.
- $B : [H^1(0, \ell)]^3 \times L^2(0, \ell) \rightarrow L^2(0, \ell)$ é uma função tal que $B(f^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}, h^{(n)})$ é limitada em $L^2(0, \ell)$.

- As seguintes convergências são satisfeitas no sentido de $L^2(0, \ell)$, onde os coeficientes $\rho, a_1, r, a_2, \gamma, \kappa, m, \tau, \delta$ são constantes positivas e $c \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& \rho \mathbf{i} \beta_n F^{(n)} - a_1 [L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})]_x + B(f^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}, h^{(n)}) \rightarrow 0, \\
& \mathbf{i} \beta_n L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}) - L(F_x^{(n)}, V^{(n)}, Z^{(n)}) \rightarrow 0, \\
& (F^{(n)}, V^{(n)})_{L^2} \rightarrow 0, \\
& y^{(n)} \rightarrow 0, \\
& r \mathbf{i} \beta_n Z^{(n)} - a_2 [N(z_x^{(n)}, v^{(n)}, f^{(n)})]_x - c L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)}) + \gamma T_x^{(n)} \rightarrow 0, \\
& \mathbf{i} \beta_n T^{(n)} + \kappa y_x^{(n)} + m N(Z_x^{(n)}, V^{(n)}, F^{(n)}) \rightarrow 0, \\
& \tau \mathbf{i} \beta_n y^{(n)} + \delta y^{(n)} + T_x^{(n)} \rightarrow 0, \\
& \mathbf{i} \beta_n N(z_x^{(n)}, v^{(n)}, f^{(n)}) - N(Z_x^{(n)}, V^{(n)}, F^{(n)}) \rightarrow 0, \\
& \frac{1}{\mathbf{i} \beta_n} Z^{(n)} \overline{T^{(n)}} \Big|_0^\ell \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Sob essas condições, se

$$\left(\tau - \frac{\kappa}{\ell_1} \frac{\rho}{a_1} \right) \left(a_2 - \frac{r \ell_1}{n_1} \frac{a_1}{\rho} \right) + \tau \gamma m = 0,$$

então

$$\begin{aligned}
& \rho n_3 \left(a_2 + \frac{\gamma m}{\sigma} \right) \|F^{(n)}\|_{L^2}^2 + a_1 c \|L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})\|_{L^2}^2 + n_1 \rho \left(a_2 + \frac{\gamma m}{\sigma} \right) Z^{(n)} \overline{F^{(n)}} \Big|_0^\ell \\
& + a_1 a_2 N(z_x^{(n)}, v^{(n)}, f^{(n)}) \overline{L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})} \Big|_0^\ell + \frac{\gamma \rho \kappa}{\sigma} y^{(n)} \overline{F^{(n)}} \Big|_0^\ell \\
& - \frac{\gamma a_1}{\sigma} T^{(n)} \overline{L(f_x^{(n)}, v^{(n)}, z^{(n)})} \Big|_0^\ell \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

onde $\sigma = \left(1 - \frac{\rho \kappa}{\ell_1 \tau a_1} \right)$.

Agora, estamos em condições de enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.3 (Estabilidade exponencial). *Seja L_1 a constante definida em (1.4). Se*

$$L_1 = 0, \tag{3.1}$$

então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável. Consequentemente, existem constantes $M \geq 1$ e $\alpha > 0$ tais que a solução U do problema (2.6) satisfaz

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M \|U_0\|_{\mathcal{H}} e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

Demonstração. Em vista da Proposição 2.7, pelo bem conhecido Teorema de Gearhart-Prüss (veja o Teorema 1.3.2 em [10]), basta provar que $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(\mathbf{i}\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$.

Para isso, basta provar que existem constantes $C, \beta_0 > 0$ tais que

$$\|(\mathbf{i}\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq C, \quad \forall |\beta| \geq \beta_0.$$

Suponha que isso não ocorra. Então, existem uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e uma sequência

$$U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)}, \Theta^{(n)}, g^{(n)}, \vartheta^{(n)}, p^{(n)}) \in D(\mathcal{A})$$

tais que

$$|\beta_n| \rightarrow \infty, \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Em termos de suas componentes, a última convergência de (3.3) se expressa da seguinte forma, onde todas as convergências são no sentido de L^2 :

$$\mathbf{i}\beta_n \varphi^{(n)} - \Phi^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \varphi_x^{(n)} - \Phi_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

$$\rho_1 \mathbf{i}\beta_n \Phi^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - lk_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}) + \gamma_1 \Theta_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \psi^{(n)} - \Psi^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \psi_x^{(n)} - \Psi_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$\rho_2 \mathbf{i}\beta_n \Psi^{(n)} - b\psi_{xx}^{(n)} + k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) + \gamma_2 \vartheta_x^{(n)} - \gamma_1 \Theta^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{i}\beta_n w^{(n)} - W^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{i}\beta_n w_x^{(n)} - W_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

$$\rho_3 \mathbf{i}\beta_n W^{(n)} - k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x + kl(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - l\gamma_1 \Theta^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \Theta^{(n)} + k_1 g_x^{(n)} + m_1(\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

$$\tau_1 \mathbf{i}\beta_n g^{(n)} + \delta_1 g^{(n)} + \Theta_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \vartheta^{(n)} + k_2 p_x^{(n)} + m_2 \Psi_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

$$\tau_2 \mathbf{i}\beta_n p^{(n)} + \delta_2 p^{(n)} + \vartheta_x^{(n)} \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Note que, como $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, as seguintes sequências são limitadas em L^2 : $(\Phi^{(n)})$, $(\Psi^{(n)})$, $(W^{(n)})$, $(\Theta^{(n)})$, $(g^{(n)})$, $(\vartheta^{(n)})$, $(p^{(n)})$, $(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})$, $(\psi_x^{(n)})$ e $(w_x - l\varphi^{(n)})$. Além disso, usando a equivalência entre as normas (2.2) e (2.4), segue que $(\varphi^{(n)})$, $(\varphi_x^{(n)})$, $(\psi^{(n)})$, $(w^{(n)})$ e $(w_x^{(n)})$ também são limitadas. Assim, multiplicando (3.5), (3.8), (3.11),

(3.14), (3.16), (3.13), (3.15), (3.6), (3.9) e (3.12) por $\frac{1}{\mathbf{i}\beta_n}$, concluímos que $(\frac{\Phi_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{\Psi_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{W_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{\Theta_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{\vartheta_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{g_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{p_x^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x}{\mathbf{i}\beta_n})$, $(\frac{\psi_{xx}^{(n)}}{\mathbf{i}\beta_n})$ e $(\frac{(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x}{\mathbf{i}\beta_n})$ também são limitadas. Essas limitações serão tacitamente utilizadas nas aplicações do Lema 3.1 e do Lema 3.2 que faremos a seguir.

De (3.3) e (2.8), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1 \delta_1 k_1}{m_1} \|g^{(n)}\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_2 \delta_2 k_2}{m_2} \|p^{(n)}\|_{L^2}^2 &= \operatorname{Re}(-\mathcal{A}U_n, U_n)_{\mathcal{H}} \\ &= \operatorname{Re}((\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})U_n, U_n)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{(n)} \rightarrow 0, \quad p^{(n)} \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

De (3.4)-(3.17), segue imediatamente que

$$\begin{aligned} g^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \rho_1 \mathbf{i}\beta_n \Phi^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - lk_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}) + \gamma_1 \Theta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n \Theta^{(n)} + k_1 g_x^{(n)} + m_1(\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) &\rightarrow 0, \\ \tau_1 \mathbf{i}\beta_n g^{(n)} + \delta_1 g^{(n)} + \Theta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - (\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{\mathbf{i}\beta_n} \Phi^{(n)} \Theta^{(n)} \Big|_0^\ell &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Lema 3.1 com $F^{(n)} = \Phi^{(n)}$, $V^{(n)} = \Psi^{(n)}$, $Z^{(n)} = W^{(n)}$, $T^{(n)} = \Theta^{(n)}$, $f^{(n)} = \varphi^{(n)}$, $v^{(n)} = \psi^{(n)}$, $z^{(n)} = w^{(n)}$, $y^{(n)} = g^{(n)}$, $h^{(n)} = 0$, $L(\varphi_x^{(n)}, \psi^{(n)}, w^{(n)}) = \varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}$, $B(\varphi^{(n)}, \psi^{(n)}, w^{(n)}, h^{(n)}) = -lk_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})$, $\rho = \rho_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\kappa = k_1$, $m = m_1$, $\tau = \tau_1$ e $\delta = \delta_1$, concluímos que

$$\Theta^{(n)} \rightarrow 0, \quad \varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)} \rightarrow 0, \quad \Phi^{(n)} \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

De (3.4)-(3.18), segue imediatamente que

$$\begin{aligned} p^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \rho_2 \mathbf{i}\beta_n \Psi^{(n)} - b\psi_{xx}^{(n)} + \gamma_2 \vartheta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n \vartheta^{(n)} + k_2 p_x^{(n)} + m_2 \Psi_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \tau_2 \mathbf{i}\beta_n p^{(n)} + \delta_2 p^{(n)} + \vartheta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n \psi_x^{(n)} - \Psi_x^{(n)} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathbf{i}\beta_n} \Psi^{(n)} \vartheta^{(n)} \Big|_0^\ell = 0.$$

Portanto, aplicando o Lema 3.1 com $F^{(n)} = \Psi^{(n)}$, $V^{(n)} = Z^{(n)} = 0$, $T^{(n)} = \vartheta^{(n)}$, $f^{(n)} = \psi^{(n)}$, $v^{(n)} = z^{(n)} = 0$, $y^{(n)} = p^{(n)}$, $h^{(n)} = 0$, $L(\psi_x^{(n)}, \varphi^{(n)}, w^{(n)}) = \psi_x^{(n)}$, $B(\psi^{(n)}, \varphi^{(n)}, w^{(n)}, \Theta^{(n)}) = 0$, $\rho = \rho_2$, $k = b$, $\gamma = \gamma_2$, $\kappa = k_2$, $m = m_2$, $\tau = \tau_2$ e $\delta = \delta_2$, concluímos que

$$\vartheta^{(n)} \rightarrow 0, \quad \psi_x^{(n)} \rightarrow 0, \quad \Psi^{(n)} \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

De (3.4)-(3.19), segue imediatamente que

$$\begin{aligned} \rho_3 \mathbf{i}\beta_n W^{(n)} - k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}) - (W_x^{(n)} - l\Phi^{(n)}) &\rightarrow 0, \\ (W^{(n)}, \Psi^{(n)})_{L^2} &\rightarrow 0, \\ g^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \rho_1 \mathbf{i}\beta_n \Phi^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - lk_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}) + \gamma_1 \Theta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n \Theta^{(n)} + k_1 g_x^{(n)} + m_1(\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) &\rightarrow 0, \\ \tau_1 \mathbf{i}\beta_n g^{(n)} + \delta_1 g^{(n)} + \Theta_x^{(n)} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{i}\beta_n(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - (\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{\mathbf{i}\beta_n} \Phi^{(n)} \Theta^{(n)} \Big|_0^\ell &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, lembrando da hipótese (3.1) e aplicando o Lema 3.2 com $F^{(n)} = W^{(n)}$, $V^{(n)} = \Psi^{(n)}$, $Z^{(n)} = \Phi^{(n)}$, $T^{(n)} = \Theta^{(n)}$, $f^{(n)} = w^{(n)}$, $v^{(n)} = \psi^{(n)}$, $z^{(n)} = \varphi^{(n)}$, $y^{(n)} = g^{(n)}$, $h^{(n)} = 0$, $L(w_x^{(n)}, \psi^{(n)}, \varphi^{(n)}) = w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}$, $B(w^{(n)}, \psi^{(n)}, \varphi^{(n)}, \Theta^{(n)}) = 0$, $N(\varphi_x^{(n)}, \psi^{(n)}, w^{(n)}) = \varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}$, $\rho = \rho_3$, $a_1 = k_0$, $r = \rho_1$, $a_2 = k$, $c = lk_0$, $\gamma = \gamma_1$, $\kappa = k_1$, $m = m_1$, $\tau = \tau_1$ e $\delta = \delta_1$, concluímos que

$$\begin{aligned} \rho_3 l \left(k + \frac{\gamma_1 m_1}{\sigma} \right) \|W^{(n)}\|_{L^2}^2 + k_0^2 l \|w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}\|_{L^2}^2 + \rho_3 \left(k + \frac{\gamma_1 m_1}{\sigma} \right) \Phi^{(n)} \overline{W^{(n)}} \Big|_0^\ell \\ + k k_0 (\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) \overline{(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})} \Big|_0^\ell + \frac{\gamma_1 \rho_3 k_1}{\sigma} g^{(n)} \overline{W^{(n)}} \Big|_0^\ell \\ - \frac{\gamma_1 k_0}{\sigma} \Theta^{(n)} \overline{(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})} \Big|_0^\ell \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde todos os termos de fronteira se anulam (em razão das condições de fronteira), $\sigma = \left(1 - \frac{\rho_3 k_1}{\tau_1 k_0} \right)$ e $\left(k + \frac{\gamma_1 m_1}{\sigma} \right) = \frac{k_0 \rho_1}{\rho_3} > 0$. Portanto,

$$W^{(n)} \rightarrow 0, \quad w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)} \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

De (3.17)-(3.20) segue que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$. Absurdo, pois contradiz (3.3). $\square$

4 Falta de estabilidade exponencial

Tendo na seção precedente estabelecido uma condição suficiente para que a estabilidade exponencial ocorra, nesta seção vamos estabelecer uma condição suficiente para que ela não ocorra.

Teorema 4.1 (Falta de estabilidade exponencial). *Sejam L_1 , L_2 e L_3 as constantes definidas em (1.4)-(1.6). Se*

$$L_1 \neq 0, \quad L_2 \neq 0 \quad e \quad L_3 \neq 0, \quad (4.1)$$

então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ não é exponencialmente estável.

Demonstração. Pelo Teorema de Gearhart-Prüss, já utilizado na demonstração do Teorema 3.3, basta provar que não se tem $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(\mathbf{i}\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$. Para isso, basta provar que existem uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_n \rightarrow \infty$ e uma sequência limitada $F_n \in \mathcal{H}$ tais que

$$\|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

De fato, nesse caso, pela limitação de F_n , existirá $C > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq C \|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}}.$$

Consequentemente, teremos

$$\begin{aligned} \limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(\mathbf{i}\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} C^{-1} \|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} = \infty. \end{aligned}$$

Vamos, então, construir essas sequências (β_n) e (F_n) . Escrevendo $c_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}$, defina

$$\beta_n = \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3} c_n^2 + \frac{kl^2}{\rho_3}} \quad e \quad F_n = (0, 0, 0, 0, 0, f_n, 0, 0, 0, 0),$$

onde $f_n(x) = \rho_3^{-1} \cos(c_n x)$. Como

$$c_n \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

é imediato que $\beta_n = c_n \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3} + \frac{kl^2}{\rho_3 c_n^2}} \rightarrow \infty$. Além disso, é claro que $F_n \in \mathcal{H}$ com

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_3 \|f_n\|_{L^2}^2 = \rho_3^{-1} \int_0^\ell \cos^2(c_n x) dx = \rho_3^{-1} \frac{\ell}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (F_n) é limitada. Pela Proposição 2.7, $\mathbf{i}\beta_n \in \rho(\mathcal{A})$. Assim, o operador $(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ é bijetor. Consequentemente, existe um único

$$U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)}, \Theta^{(n)}, g^{(n)}, \vartheta^{(n)}, p^{(n)}) \in D(\mathcal{A}) \quad (4.4)$$

tal que

$$(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})U_n = F_n. \quad (4.5)$$

Em termos de suas componentes, essa igualdade se reescreve como

$$\mathbf{i}\beta_n \varphi^{(n)} - \Phi^{(n)} = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho_1 \mathbf{i}\beta_n \Phi^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - lk_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)}) + \gamma_1 \Theta_x^{(n)} = 0 \quad (4.7)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \psi^{(n)} - \Psi^{(n)} = 0 \quad (4.8)$$

$$\rho_2 \mathbf{i}\beta_n \Psi^{(n)} - b\psi_{xx}^{(n)} + k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) + \gamma_2 \vartheta_x^{(n)} - \gamma_1 \Theta^{(n)} = 0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{i}\beta_n w^{(n)} - W^{(n)} = 0 \quad (4.10)$$

$$\rho_3 \mathbf{i}\beta_n W^{(n)} - k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x + kl(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - l\gamma_1 \Theta^{(n)} = \rho_3 f_n \quad (4.11)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \Theta^{(n)} + k_1 g_x^{(n)} + m_1(\Phi_x^{(n)} + \Psi^{(n)} + lW^{(n)}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\tau_1 \mathbf{i}\beta_n g^{(n)} + \delta_1 g^{(n)} + \Theta_x^{(n)} = 0 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{i}\beta_n \vartheta^{(n)} + k_2 p_x^{(n)} + m_2 \Psi_x^{(n)} = 0 \quad (4.14)$$

$$\tau_2 \mathbf{i}\beta_n p^{(n)} + \delta_2 p^{(n)} + \vartheta_x^{(n)} = 0 \quad (4.15)$$

Defina a matriz

$$M_n = \begin{bmatrix} p_1^{(n)} & kc_n & l(k+k_0)c_n & -\gamma_1 c_n & 0 \\ kc_n & p_2^{(n)} & kl & -\gamma_1 & \gamma_2 c_n \\ l(k+k_0)c_n & kl & p_3^{(n)} & -l\gamma_1 & 0 \\ m_1 \mathbf{i}\beta_n c_n & m_1 \mathbf{i}\beta_n & m_1 \mathbf{i}\beta_n l & p_4^{(n)} & 0 \\ 0 & -m_2 \mathbf{i}\beta_n c_n & 0 & 0 & p_5^{(n)} \end{bmatrix},$$

onde

$$p_1^{(n)} = -\rho_1 \beta_n^2 + kc_n^2 + k_0 l^2, \quad p_2^{(n)} = -\rho_2 \beta_n^2 + bc_n^2 + k,$$

$$p_3^{(n)} = -\rho_3 \beta_n^2 + k_0 c_n^2 + kl^2, \quad p_4^{(n)} = \mathbf{i}\beta_n + \frac{k_1 c_n^2}{\tau_1 \mathbf{i}\beta_n + \delta_1}$$

$$p_5^{(n)} = \mathbf{i}\beta_n + \frac{k_2 c_n^2}{\tau_2 \mathbf{i}\beta_n + \delta_2}.$$

Uma substituição direta nas equações (4.6)-(4.15) nos mostra que as funções

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= A_n \sin(c_n x), & \psi^{(n)}(x) &= B_n \cos(c_n x), & w^{(n)}(x) &= C_n \cos(c_n x), \\ \Theta^{(n)}(x) &= D_n \cos(c_n x), & g^{(n)}(x) &= E_n \sin(c_n x), & \vartheta^{(n)}(x) &= \tilde{D}_n \sin(c_n x), \\ p^{(n)}(x) &= \tilde{E}_n \cos(c_n x), & \Phi^{(n)} &= \mathbf{i}\beta_n A_n \sin(c_n x), & \Psi^{(n)} &= \mathbf{i}\beta_n B_n \cos(c_n x), \\ W^{(n)} &= \mathbf{i}\beta_n C_n \cos(c_n x),\end{aligned}\tag{4.16}$$

onde $E_n = \frac{D_n c_n}{\tau_1 \mathbf{i}\beta_n + \delta_1}$ e $\tilde{E}_n = -\frac{\tilde{D}_n c_n}{\tau_2 \mathbf{i}\beta_n + \delta_2}$, determinam uma solução de (4.6)-(4.15) se, e somente se, o vetor $(A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{D}_n) \in \mathbb{C}^5$ é uma solução do sistema linear

$$M_n \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ \tilde{D}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{4.17}$$

Assim, existem duas possibilidades:

1. $\det M_n = 0$, caso em que a única solução (4.4) de (4.6)-(4.15) não é dada por funções da forma (4.16). (Necessariamente, o sistema será inconsistente – caso contrário, a unicidade de solução de (4.6)-(4.15) seria violada.)
2. $\det M_n \neq 0$, caso em que a única solução (4.4) de (4.6)-(4.15) é dada precisamente por funções da forma (4.16), onde $(A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{D}_n)$ é a única solução de (4.17). Nessa situação, pela Regra de Cramer,

$$C_n = \frac{\det \tilde{C}_n}{\det M_n},\tag{4.18}$$

onde

$$\tilde{C}_n = \begin{bmatrix} p_1^{(n)} & k c_n & 0 & -\gamma_1 c_n & 0 \\ k c_n & p_2^{(n)} & 0 & -\gamma_1 & \gamma_2 c_n \\ l(k + k_0) c_n & k l & 1 & -l \gamma_1 & 0 \\ m_1 \mathbf{i} \beta_n c_n & m_1 \mathbf{i} \beta_n & 0 & p_4^{(n)} & 0 \\ 0 & -m_2 \mathbf{i} \beta_n c_n & 0 & 0 & p_5^{(n)} \end{bmatrix}.$$

A seguir, vamos mostrar que estamos na possibilidade 2 para todo n suficientemente grande. Para isso note que, pela escolha de β_n , temos $p_3^{(n)} = 0$. Portanto, escrevendo

$d = k + k_0$ para simplificar a notação, um cálculo direto (veja a Observação 4.3) nos mostra que

$$\begin{aligned} \det M_n = l^2 & \left(2\beta_n^2 c_n^4 d \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 - \beta_n^2 c_n^2 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 p_1^{(n)} - \mathbf{i} \beta_n c_n^4 d^2 \gamma_2 m_2 p_4^{(n)} \right. \\ & - \mathbf{i} \beta_n c_n^2 d^2 \gamma_1 m_1 p_5^{(n)} + 4\mathbf{i} \beta_n c_n^2 d \gamma_1 k m_1 p_5^{(n)} - 2\mathbf{i} \beta_n c_n^2 d \gamma_1 m_1 p_2^{(n)} p_5^{(n)} \\ & - 2\mathbf{i} \beta_n \gamma_1 k m_1 p_1^{(n)} p_5^{(n)} + \mathbf{i} \beta_n \gamma_1 m_1 p_1^{(n)} p_2^{(n)} p_5^{(n)} - c_n^2 d^2 p_2^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)} \\ & \left. + 2c_n^2 d k^2 p_4^{(n)} p_5^{(n)} - k^2 p_1^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)} \right). \end{aligned}$$

No que segue, vamos usar a notação O-grande: escreveremos $x_n = O(y_n)$ para indicar que existe uma constante $C > 0$ tal que $|x_n| \leq C y_n$ para todo natural n . Note que

$$c_n = O(n), \quad \beta_n = O(n), \quad p_1^{(n)} = O(n^2), \quad p_2^{(n)} = O(n^2), \quad p_4^{(n)} = O(n), \quad p_5^{(n)} = O(n).$$

Portanto,

$$\det M_n = x_n + O(n^4),$$

onde

$$\begin{aligned} x_n = l^2 & \left(2\beta_n^2 c_n^4 d \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 - \beta_n^2 c_n^2 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 p_1^{(n)} - \mathbf{i} \beta_n c_n^4 d^2 \gamma_2 m_2 p_4^{(n)} \right. \\ & \left. - 2\mathbf{i} \beta_n c_n^2 d \gamma_1 m_1 p_2^{(n)} p_5^{(n)} + \mathbf{i} \beta_n \gamma_1 m_1 p_1^{(n)} p_2^{(n)} p_5^{(n)} - c_n^2 d^2 p_2^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)} \right) = O(n^6). \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \frac{c_n}{n} &= \frac{(2 + \frac{1}{n})\pi}{2\ell} \rightarrow \frac{\pi}{\ell}, \quad \frac{\beta_n}{n} = \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3} \left(\frac{c_n}{n}\right)^2 + \frac{k l^2}{\rho_3 n^2}} \rightarrow \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}}, \\ \frac{p_4^{(n)}}{n} &= \mathbf{i} \frac{\beta_n}{n} + \frac{k_1 \left(\frac{c_n}{n}\right)^2}{\tau_1 \mathbf{i} \frac{\beta_n}{n} + \frac{\delta_1}{n}} \rightarrow \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} + \frac{k_1 \frac{\pi^2}{\ell^2}}{\tau_1 \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}}} = \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{p_1^{(n)}}{n^2} &\rightarrow \frac{\pi^2}{\ell^2} \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3}\right), \quad \frac{p_2^{(n)}}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{\ell^2} \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3}\right), \\ \frac{p_5^{(n)}}{n} &\rightarrow \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\det M_n}{n^6} &= l^2 \left(2 \frac{\beta_n^2 c_n^4}{n^2 n^4} d\gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 - \frac{\beta_n^2 c_n^2}{n^2 n^2} \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 \frac{p_1^{(n)}}{n^2} - \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^4}{n n^4} d^2 \gamma_2 m_2 \frac{p_4^{(n)}}{n} \right. \\
&\quad - 2\mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} d\gamma_1 m_1 \frac{p_2^{(n)}}{n^2} \frac{p_5^{(n)}}{n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n}{n} \gamma_1 m_1 \frac{p_1^{(n)}}{n^2} \frac{p_2^{(n)}}{n^2} \frac{p_5^{(n)}}{n} \\
&\quad \left. - \frac{c_n^2}{n^2} d^2 \frac{p_2^{(n)}}{n^2} \frac{p_4^{(n)}}{n} \frac{p_5^{(n)}}{n} \right) + \frac{O(n^4)}{n^6} \\
&\rightarrow l^2 \frac{\pi^6}{\ell^6} \frac{k_0}{\rho_3} \left(2d\gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 - \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) + d^2 \gamma_2 m_2 \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0} \right) \right. \\
&\quad + 2d\gamma_1 m_1 \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) \\
&\quad - \gamma_1 m_1 \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) \\
&\quad \left. + d^2 \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) \right) \\
&= l^2 \frac{\pi^6}{\ell^6} \frac{k_0}{\rho_3} \left(\left[\gamma_2 m_2 + \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) \right] \left[2d\gamma_1 m_1 - \gamma_1 m_1 \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + d^2 \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0} \right) \left[\gamma_2 m_2 + \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) \right] \right) \\
&= l^2 \frac{\pi^6}{\ell^6} \frac{k_0}{\rho_3 \tau_1 \tau_2} L_2 L_3.
\end{aligned}$$

Em resumo, usando a hipótese (4.1), concluímos que

$$\frac{\det M_n}{n^6} \rightarrow l^2 \frac{\pi^6}{\ell^6} \frac{k_0}{\rho_3 \tau_1 \tau_2} L_2 L_3 \neq 0. \quad (4.21)$$

Isso implica que $\det M_n \neq 0$ para todo natural n suficientemente grande. Ou seja, para esses valores de n , estamos na possibilidade 2. Daí, pela fórmula (4.18),

$$C_n = \frac{\frac{\det \tilde{C}_n}{n^6}}{\frac{\det M_n}{n^6}} \quad (4.22)$$

para todo natural n suficientemente grande. Um cálculo direto (veja a Observação 4.3) nos mostra que

$$\det \tilde{C}_n = -\beta_n^2 c_n^4 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 - 2\mathbf{i} \beta_n c_n^2 \gamma_1 k m_1 p_5^{(n)} + \mathbf{i} \beta_n c_n^2 \gamma_1 m_1 p_2^{(n)} p_5^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{i}\beta_n c_n^2 \gamma_2 m_2 p_1^{(n)} p_4^{(n)} + \mathbf{i}\beta_n \gamma_1 m_1 p_1^{(n)} p_5^{(n)} - c_n^2 k^2 p_4^{(n)} p_5^{(n)} + p_1^{(n)} p_2^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)} \\
& = -\beta_n^2 c_n^4 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 + \mathbf{i}\beta_n c_n^2 \gamma_1 m_1 p_2^{(n)} p_5^{(n)} + \mathbf{i}\beta_n c_n^2 \gamma_2 m_2 p_1^{(n)} p_4^{(n)} \\
& + p_1^{(n)} p_2^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)} + O(n^4).
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.19)-(4.20), concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\det \tilde{C}_n}{n^6} &= -\frac{\beta_n^2 c_n^4}{n^2 n^4} \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_1 m_1 \frac{p_2^{(n)} p_5^{(n)}}{n^2 n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_2 m_2 \frac{p_1^{(n)} p_4^{(n)}}{n^2 n} \\
&+ \frac{p_1^{(n)} p_2^{(n)} p_4^{(n)} p_5^{(n)}}{n^2 n^2 n n} + \frac{O(n^4)}{n^6} \\
&= \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_2 m_2 \left[\frac{p_1^{(n)} p_4^{(n)}}{n^2 n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_1 m_1 \right] \\
&+ \left[\frac{p_1^{(n)} p_4^{(n)}}{n^2 n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_1 m_1 \right] \frac{p_2^{(n)} p_5^{(n)}}{n^2 n} + \frac{O(n^4)}{n^6} \\
&= \left[\frac{p_1^{(n)} p_4^{(n)}}{n^2 n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_1 m_1 \right] \left[\frac{p_2^{(n)} p_5^{(n)}}{n^2 n} + \mathbf{i} \frac{\beta_n c_n^2}{n n^2} \gamma_2 m_2 \right] + \frac{O(n^4)}{n^6} \\
&\rightarrow \left[\frac{\pi^2}{\ell^2} \left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0} \right) + \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \frac{\pi^2}{\ell^2} \gamma_1 m_1 \right] \\
&\cdot \left[\frac{\pi^2}{\ell^2} \left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) + \mathbf{i} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k_0}{\rho_3}} \frac{\pi^2}{\ell^2} \gamma_2 m_2 \right] \\
&= -\frac{\pi^6 k_0}{\ell^6 \rho_3} \left[\left(k - \rho_1 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_1 \rho_3}{\tau_1 k_0} \right) + \gamma_1 m_1 \right] \\
&\cdot \left[\left(b - \rho_2 \frac{k_0}{\rho_3} \right) \left(1 - \frac{k_2 \rho_3}{\tau_2 k_0} \right) + \gamma_2 m_2 \right] \\
&= -\frac{\pi^6 k_0}{\ell^6 \rho_3 \tau_1 \tau_2} L_1 L_2.
\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\frac{\det \tilde{C}_n}{n^6} \rightarrow -\frac{\pi^6 k_0}{\ell^6 \rho_3 \tau_1 \tau_2} L_1 L_2. \quad (4.23)$$

De (4.22), (4.21), (4.23) e (4.1) resulta que

$$C_n = \frac{\frac{\det \tilde{C}_n}{n^6}}{\frac{\det M_n}{n^6}} \rightarrow \frac{-\frac{\pi^6 k_0}{\ell^6 \rho_3 \tau_1 \tau_2} L_1 L_2}{l^2 \frac{\pi^6 k_0}{\ell^6 \rho_3 \tau_1 \tau_2} L_2 L_3} = -\frac{1}{l^2} \frac{L_1}{L_3} \neq 0.$$

Consequentemente, usando (4.5), (4.4), (2.4), (2.1), (4.16) e (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{i}\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C|U_n|^2 \geq C\|w^{(n)}\|_{\tilde{H}_\ell^1}^2 = CC_n^2c_n^2 \int_0^\ell \sin^2(c_n x)dx \\ &= \frac{C\ell}{2}C_n^2c_n^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Isso prova (4.2), conforme o desejado. $\square$

Observação 4.2. O argumento utilizado na última demonstração não funciona para as condições de fronteira adotadas em [4] porque, para elas, o sistema (4.6)-(4.15) não admite uma solução explícita em termos de senos e cossenos da forma (4.16).

Observação 4.3. O determinante de M_n foi calculado simbolicamente com a biblioteca SymPy do programa Python por meio do código abaixo. Um código similar foi utilizado para o cálculo do determinante de $\tilde{C}_n$.

```
import sympy as sp

# Definição dos símbolos
n, d, k, k0, l, gamma1, gamma2, m1, m2, beta_n, c_n, \
p1_n, p2_n, p3_n, p4_n, p5_n = sp.symbols(
'n d k k0 l gamma1 gamma2 m1 m2 beta_n c_n '
'p1^(n) p2^(n) p3^(n) p4^(n) p5^(n)'
)

# Definição da matriz
M_n = sp.Matrix([
[p1_n, k*c_n, l*d*c_n, -gamma1*c_n, 0],
[k*c_n, p2_n, k*l, -gamma1, gamma2*c_n],
[l*d*c_n, k*l, 0, -l*gamma1, 0],
[m1*sp.I*beta_n*c_n, m1*sp.I*beta_n, m1*sp.I*beta_n*l, p4_n, 0],
[0, -m2*sp.I*beta_n*c_n, 0, 0, p5_n]
])

# Calculo e simplificação
det_M = M_n.det()
det_M_simplificado = sp.simplify(det_M)

# Exibição do resultado
print("Determinante da matriz simplificado:")
print(sp.latex(det_M_simplificado))
```

Disponibilidade de dados

Dados não foram utilizados.

Contribuições dos autores

P. R. de Lima concebeu o estudo, desenvolveu os principais resultados teóricos e redigiu a versão final do manuscrito. J. L. B. de Barros, sob orientação, realizou cálculos específicos de integrais, determinantes e limites, bem como elaborou uma versão inicial de parte da Introdução e da Seção 4.

Referências

- [1] Afilal, M.; Guesmia, A.; Soufyane, A.: Stability of a linear thermoelastic Bresse system with second sound under new conditions on the coefficients. *Z. Angew. Math. Mech.* **103** (2023), 1-31.
- [2] Bresse, Jacques Antoine Charles. *Cours de mécanique appliquée-première partie*. Mallet-Bachelier, Paris, 1859.
- [3] de Lima, P. R.; Fernández Sare, H. D.: Stability of thermoelastic Bresse systems. *Z. Angew. Math. Phys.* **70** (2019), 1-33.
- [4] de Lima, P. R.: Generalized approach for stability numbers of shear-damped Bresse systems with Cattaneo couplings. *Applicable Analysis* **104** (2025), 442-466.
- [5] Engel, K. J.; Nagel, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] Jorge Silva, Marcio Antonio; Ma, To Fu.: Fundamentals of thermoelasticity for curved beams. *J. Therm. Stresses* (2025), 1-26.
- [7] Kurrer, Karl-Eugen. *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Ernst & Sohn, Berlin, 2008.
- [8] Lagnese, J. E.; Leugering, G.; Schmidt, E. J. P. G. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [9] Liu, Z.; Rao, B.: Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Z. Angew. Math. Phys.* **60** (2009), 54-69.

- [10] Liu, Z; Zheng, S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. Chapman & Hall, London, 1999.
- [11] Muñoz Rivera, J. E.; Naso, M. G.: Pointwise stabilization of Bresse systems. *Z. Angew. Math. Phys.* **74** (2023), 1-16.
- [12] Muñoz Rivera, J. E.; Racke, R.: Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl.* **276** (2002), 248-278.
- [13] Soriano Palomino, Juan A.; Cavalcanti, Marcelo M.; Domingos Cavalcanti, Valéria N. *Linear and Non-Linear Semigroups and Applications*. UEM/DMA, Maringá, 2020.
- [14] Teodorescu, Petre P. *Treatise on Classical Elasticity: Theory and Related Problems*. Springer, Dordrecht, 2013.

Recebido em 19 de Março de 2026

Aceito em 24 de Agosto de 2026