Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v11i1.24800

# APAGUE AS LUZES! UM JOGO DE COMBINATÓRIA E ÁLGEBRA LINEAR

# TURN OFF THE LIGHTS! A GAME OF COMBINATORICS AND LINEAR ALGEBRA

Cássio Henrique Vieira Morais
Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Matemática, Vitória, Espírito Santo, Brasil
cassio.morais@ufes.br

Tiane Marcarini
Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Matemática, Vitória, Espírito Santo, Brasil
tiane.pinto@ufes.br

Comunicado por M. Alegri

**Resumo**

Neste trabalho, estudamos uma variante triangular do jogo "Lights Out", proposto na Olimpíada Capixaba de Matemática de 2025. Apresentamos uma descrição combinatória do jogo, caracterizamos formalmente suas operações e introduzimos o conceito de núcleo, que determina quais configurações admitem solução e quantas soluções existem. Em seguida, analisamos padrões geométricos que surgem em elementos do núcleo e descrevemos mecanismos de propagação desses padrões para jogos de tamanhos maiores. Por fim, modelamos o problema por meio de sistemas lineares sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$, obtendo uma matriz associada ao jogo e um critério combinatório para a invertibilidade dessa matriz. Esse critério estabelece que o jogo admite solução para toda configuração se, e somente se, o número de recobrimentos do tabuleiro por peças $1 \times 1$ e $2 \times 1$ é ímpar.

**Palavras-chave:** álgebra linear; combinatória; matrizes

**Abstract**



This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

In this work, we study a triangular variant of the "Lights Out"game, proposed in the 2025 Capixaba Mathematics Olympiad. We present a combinatorial description of the game, formally characterize its operations, and introduce the notion of the kernel, which determines which configurations admit a solution and how many solutions they possess. We then analyze the geometry of kernel and describe the propagation mechanisms that generate patterns for larger board sizes. Finally, we model the problem using linear systems over the field $\mathbb{Z}_2$, obtaining a matrix associated with the game and a combinatorial criterion for its invertibility. This criterion shows that the game admits a solution for every configuration if and only if the number of coverings of the triangular board by $1 \times 1$ and $2 \times 1$ tiles is odd

**Keywords:** linear algebra; combinatorics; matrix

# 1 Introdução

Durante a elaboração das questões para a Olimpíada Capixaba de Matemática (OCMAT) de 2025 ([6]), Tiane, coautora deste artigo, apresentou uma ideia que mais tarde se tornaria a Questão 2 da terceira fase do Nível 3. O problema envolvia um arranjo triangular de círculos em duas cores (veja a Figura 1), com o qual se podia interagir trocando a cor de determinados círculos. Embora a prova explorasse apenas aspectos básicos dessas regras de troca, diversas outras perguntas naturalmente surgiram ao analisarmos mais cuidadosamente.

Ao discutirmos essas questões em equipe, percebemos rapidamente que o problema possuía uma estrutura muito rica. Posteriormente, descobrimos que problemas semelhantes já haviam sido propostos em outros contextos. Um exemplo é a questão do *Troca-Cor* da OBMEP 2009, e também o jogo *Lights Out*, que possui regras análogas, mas formulado em um tabuleiro quadrangular $5 \times 5$ (veja [4, 5, 7]). Embora menos conhecido no Brasil, esse jogo chegou a ser comercializado nos Estados Unidos na forma de um pequeno console portátil. Do ponto de vista matemático, a generalização desse tipo de jogo para grafos arbitrários constitui tema de pesquisa em combinatória (veja [1, 2] para resultados recentes). Nesse sentido, a versão utilizada na OCMAT, baseada em um arranjo triangular, pode ser vista como uma variação do Lights Out original ou, equivalentemente, como um caso particular do problema geral.

Podemos enunciar o jogo da seguinte forma. Considere um arranjo triangular de círculos (botões) de lado $n$; diremos que esse arranjo define um jogo de tamanho $n$. As Figura 1 e 2 ilustram casos em que $n = 7$. Cada botão pode estar em um de dois estados: aceso/ligado ou apagado/desligado, representados, respectivamente, pelas cores branca e preta. Uma configuração é a escolha de um estado para cada um dos botões.

Chamaremos de vizinhos de um botão todos os círculos que lhe são tangentes. A ação fundamental do jogo consiste em pressionar um botão. Quando isso ocorre, o botão pressionado e todos os seus vizinhos trocam de estado: os que estavam acesos passam a ficar apagados, e os que estavam apagados acendem. As Figuras 1 e 2 exibem as configurações antes e depois do botão 10 ser pressionado.

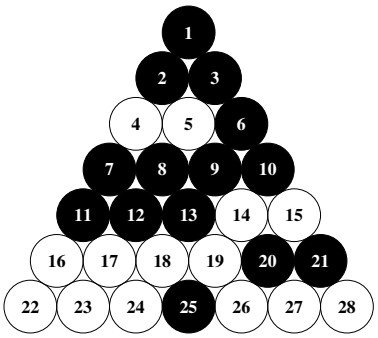



Figura 1: Uma configuração do jogo de tamanho $n = 7$.

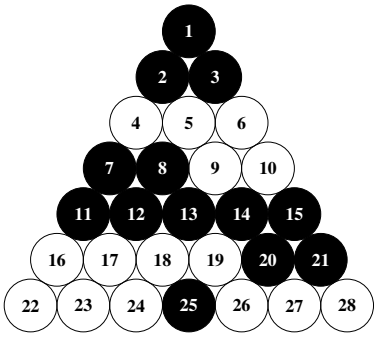



Figura 2: A configuração obtida ao se pressionar o botão 10 na Figura 1.

O objetivo do jogo é apagar todas as luzes. Em outras palavras, dada uma configuração inicial, o jogador deve determinar uma sequência de botões cuja pressão resulte na configuração apagada, isto é, aquela em que todos os botões estão desligados. No exemplo da Figura 1, uma possível sequência é 1, 10, 12, 20, 22, 23, 25. Uma versão interativa do jogo, implementada em GeoGebra, pode ser encontrada em [3].

Esse cenário suscita diversas perguntas naturais. Para uma configuração dada, sempre existe uma solução? Quando existe, ela é necessariamente única? E em que medida essas respostas dependem da configuração inicial ou do valor de $n$? Algumas dessas questões serão discutidas ao longo do artigo. Na Seção 2 apresentamos propriedades básicas do jogo e uma consequência importante: para um dado $n$, a existência de configurações sem solução está relacionada à presença de *sequências nulas*, isto é, sequências não triviais de botões que, quando pressionados, não alteram a configuração inicial. Na Seção 3 estabelecemos um critério para determinar valores de $n$ para os quais existem configurações insolúveis.

Inicialmente, nós autores abordamos o problema por meio de ferramentas de álgebra linear, e os resultados da Seção 2 podem ser formalizados de maneira sistemática nesse contexto. No entanto, optamos por apresentar ali uma versão bastante elementar, que não exige qualquer conhecimento técnico prévio. Com pequenas adaptações, essa seção pode ser reformulada de forma acessível até mesmo para alunos do ensino fundamental. Já na Seção 4 incluímos explicitamente a abordagem via álgebra linear, em razão de

sua grande eficácia na análise do jogo. Para estudantes do ensino médio com boa base algébrica, essa perspectiva pode servir como introdução aos temas de sistemas lineares, matrizes e suas inversas, e, posteriormente, à própria álgebra linear. Para alunos que já dominam esses tópicos, o problema oferece um exemplo natural de espaços vetoriais sobre corpos finitos.

# 2 Preliminares

Nesta seção, desenvolveremos alguns resultados acerca da existência de soluções e de sua quantidade. Iniciamos com algumas observações simples, mas fundamentais, sobre o funcionamento dos botões.

Em um jogo de tamanho $n$ há $\beta = \frac{n(n+1)}{2}$ botões, que identificaremos pelos números $1, 2, \ldots, \beta$. Uma primeira observação importante é que a ordem em que os botões são pressionados não influencia o resultado final. De fato, ao fixarmos um botão $j$, seu estado final depende apenas de quantos botões que o afetam foram pressionados, e não da ordem desses pressionamentos. Além disso, como cada botão possui apenas dois estados possíveis, pressionar um mesmo botão um número par de vezes não produz efeito algum. Registramos essas observações na propriedade a seguir.

*Propriedade* 2.1. A ordem de pressionamento dos botões é irrelevante, e pressionar o mesmo botão duas vezes equivale a não pressioná-lo.

A partir dessa propriedade, um mesmo subconjunto de $\{1, 2, \ldots, \beta\}$ pode ser interpretado de maneiras distintas, conforme o contexto. Essas interpretações correspondem a diferentes aspectos do jogo.

**Interpretação como Estado do jogo.** Um subconjunto pode representar uma configuração, isto é, uma escolha do estado de cada botão. Nessa interpretação, os elementos do subconjunto são exatamente os botões que se encontram acesos. Por exemplo, o conjunto vazio corresponde à configuração em que todos os botões estão apagados. Utilizaremos as letras $C$ e $D$ para indicar configurações.

**Interpretação como Ação do jogo.** Um subconjunto também pode representar o conjunto de botões que decidimos pressionar. Graças à Propriedade 2.1, toda sequência de jogadas pode ser descrita dessa forma, pois a ordem é irrelevante e pressionamentos repetidos um quantidade par de vezes podem ser descartados. Quando usarmos essa interpretação, empregaremos em geral as letras $X$ e $Y$.

**Interpretação como Efeito de uma jogada.** Por fim, um subconjunto pode representar o conjunto de botões cujo estado foi alterado ao passarmos de uma configuração para outra. Por exemplo, ao passarmos da configuração apagada $\emptyset$ para uma configuração $C$, exatamente os botões de $C$ tiveram seu estado alterado. De modo ge-

ral, ao passarmos de uma configuração $C$ para uma configuração $D$, os botões alterados formam o conjunto

$$C \triangle D = (C \cup D) \setminus (C \cap D),$$

isto é, a diferença simétrica entre $C$ e $D$. Não introduziremos uma notação específica para essa interpretação.

Com essa terminologia, podemos descrever o jogo da seguinte forma. Dada uma configuração inicial $C$ e um conjunto de botões $X$, pressionar os botões de $X$ produz um certo efeito, isto é, altera exatamente os botões de algum subconjunto $V$. O objetivo do jogo é escolher $X$ de modo que esse efeito coincida com $C$, pois, nesse caso, os botões inicialmente acesos são apagados e alcançamos a configuração final desejada. Diremos nesse caso que $X$ é solução de $C$.

Observamos que existem $2^\beta$ configurações possíveis, $2^\beta$ conjuntos de botões e $2^\beta$ possíveis efeitos. No entanto, nem todo efeito precisa ser realizável por um conjunto de botões. O jogo de tamanho $n$ admite solução para toda configuração precisamente quando todo efeito possível pode ser obtido a partir de algum conjunto de botões. Nesse caso, uma contagem simples mostra que a solução deve ser única.

*Propriedade* 2.2. Em um jogo de tamanho $n$, se toda configuração tem solução, então essa solução é única.

Para representar de forma mais visual a evolução das configurações ao longo de uma sequência de jogadas, adotaremos a notação

$$C \xrightarrow{X} D$$

na qual $C$ representa a configuração inicial, $D$ a configuração final e $X$ o conjunto de botões pressionados. Em particular, $X$ é uma solução para a configuração $C$ quando $C \xrightarrow{X} \emptyset$.

Suponha que $C \xrightarrow{X_1} C_1$ e, em seguida, $C_1 \xrightarrow{X_2} C_2$. Como pressionar botões presentes simultaneamente em $X_1$ e $X_2$ equivale a não pressioná-los, o efeito total dessas duas etapas é obtido pressionando-se apenas os botões de $(X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2) = X_1 \triangle X_2$. Assim,

$$C \xrightarrow{X_1} C_1 \xrightarrow{X_2} C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C \xrightarrow{X_1 \triangle X_2} C_2.$$

Em outras palavras, a diferença simétrica de conjuntos de botões produz o mesmo efeito que a sucessão das jogadas correspondentes.

Passemos agora a analisar a recíproca da Propriedade 2.2. Suponha que uma configuração $C$ admita duas soluções distintas. Ou seja, existam conjuntos de botões $X_1$ e $X_2$, com $X_1 \neq X_2$, tais que $C \xrightarrow{X_1} \emptyset$ e $C \xrightarrow{X_2} \emptyset$. Notamos que isso implica que $\emptyset \xrightarrow{X_2} C$ e daí obtemos

$$C \xrightarrow{X_1} \emptyset \xrightarrow{X_2} C \qquad \Longrightarrow \qquad C \xrightarrow{X_1 \triangle X_2} C.$$

Como $X_1 \neq X_2$, segue que $X = X_1 \triangle X_2$ é não vazio. Portanto, o efeito de pressionar exatamente os botões de $X$ é não alterar nenhum botão. Esse tipo de conjunto desempenha um papel central no jogo.

**Definição 2.3.** Um conjunto de botões $X \subset \{1, 2, ..., \beta\}$ é uma *sequência nula* quando $C \xrightarrow{X} C$ para toda configuração $C$. O conjunto de todas as sequências nulas é chamado *núcleo* do jogo.

Observamos que o conjunto vazio é sempre uma sequência nula, pois não pressionar nenhum botão não altera nenhuma configuração. Além disso, se um conjunto $X$ satisfaz $C \xrightarrow{X} C$ para alguma configuração $C$, então o mesmo vale para qualquer configuração. Assim, para verificar se $X$ pertence ao núcleo, basta verificar se $\emptyset \xrightarrow{X} \emptyset$. Em outras palavras, basta verificar se $X$ é uma solução para a configuração $\emptyset$.

Como vimos, a existência de duas soluções distintas para uma mesma configuração implica a existência de uma sequência nula não trivial. Em certo sentido, soluções distintas para uma mesma configuração sempre diferem por uma sequência nula. Observar isso nos permite descrever todas as soluções de uma configuração (que admite alguma). Se o núcleo possui exatamente $k$ elementos, digamos $N_1, \ldots, N_k$, e se $X$ é uma solução para uma configuração $C$, então

$$X \triangle N_1,\ X \triangle N_2,\ \ldots,\ X \triangle N_k$$

são precisamente todas as soluções de $C$. Provaremos essa afirmação a seguir.

*Propriedade* 2.4. Em um jogo de tamanho $n$, se o núcleo tem $k$ elementos, então toda configuração que possui solução tem exatamente $k$ soluções. Em particular, se $k > 1$, existem configurações sem solução.

*Demonstração.* Sejam $N_1, \ldots, N_k$ os elementos do núcleo. Seja $C$ uma configuração que admite solução e seja $X$ tal que $C \xrightarrow{X} \emptyset$. Como cada $N_j$ pertence ao núcleo, temos $\emptyset \xrightarrow{N_j} \emptyset$ e, portanto,

$$C \xrightarrow{X} \emptyset \xrightarrow{N_j} \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad C \xrightarrow{X \triangle N_j} \emptyset.$$

Assim, cada $X \triangle N_j$ é solução de $C$. Essas soluções são distintas entre si, pois

$$X \triangle N_i = X \triangle N_j \implies (X \triangle N_i) \triangle X = (X \triangle N_j) \triangle X \implies N_i = N_j.$$

Resta mostrar que não há outras soluções. Seja $Y$ uma solução adicional de $C$. Então

$$\emptyset \xrightarrow{X} C \xrightarrow{Y} \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \emptyset \xrightarrow{X \triangle Y} \emptyset.$$

Logo, $X \triangle Y$ pertence ao núcleo, digamos $X \triangle Y = N_j$, o que implica

$$Y = X \triangle (X \triangle Y) = X \triangle N_j.$$

Isso conclui a prova. □

Para concluir esta seção, determinamos o núcleo no caso de jogos de tamanho $n = 2$. O caso $n = 1$ é trivial, pois há apenas um botão e pressioná-lo altera qualquer configuração; portanto, o núcleo possui apenas o conjunto vazio.

Para $n = 2$ temos 3 botões. Observamos que pressionar qualquer um deles produz exatamente o mesmo efeito, e pressionar dois botões distintos é equivalente a não produzir alteração alguma. Assim, o núcleo contém quatro elementos:

$$\emptyset, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{2, 3\}.$$

Essas combinações estão representadas na Figura 3.

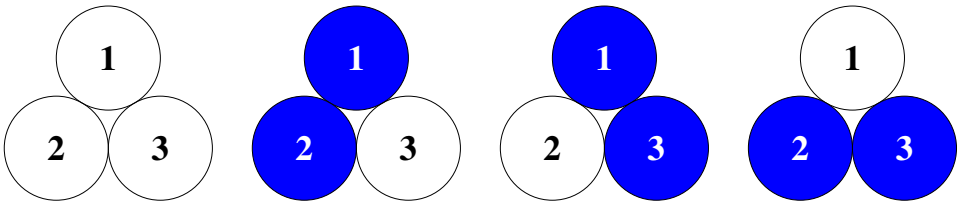



Figura 3: O núcleo de um jogo de tamanho $n = 2$.

# 3 Núcleos

Na seção anterior, definimos o núcleo. Um elemento do núcleo é uma *sequência nula*, isto é, um conjunto de botões que, ao serem pressionados, não alteram a configuração inicial. Provamos que um jogo de tamanho $n$ tem solução única para qualquer configuração quando seu núcleo é trivial. Isto é, o único elemento do núcleo é o conjunto vazio.

Nesta seção, investigaremos para quais valores de $n$ temos núcleo não trivial. Vamos representar os elementos do núcleo por meio de figuras. Por exemplo, na figura 4 a seguir, encontra-se representado um elemento $N$ do núcleo do jogo de tamanho 6. Nesta figura, os botões coloridos de azul são os elementos de $N$. Em outras palavras, ao partirmos de uma configuração $C$, ao apertarmos os botões em azul, a configuração final será $C$.

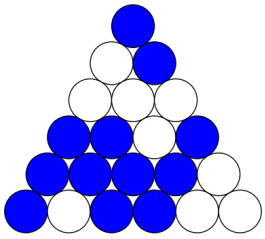


Figura 4: Uma representação de um elemento do núcleo do jogo de tamanho 6.

Para começar, verificaremos que a quantidade de elementos do núcleo é sempre uma potência de 2.

*Propriedade* 3.1. Em um jogo de tamanho $n$, o núcleo possui $2^\ell$ elementos, para algum inteiro $\ell$ com $0 \leq \ell \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

*Demonstração.* Dado um conjunto de botões $X$, seja $C$ o conjunto dos botões alterados quando pressionamos $X$. Considerando $C$ como uma configuração do jogo, isso significa que $X$ é uma solução para $C$. Assim, todo conjunto do botões é solução de alguma configuração.

Por outro lado, seja $k$ o número de elementos do núcleo. Pela Propriedade 2.4, toda configuração solúvel admite exatamente $k$ soluções. Se $m$ denota o número de configurações solúveis, então o número total de soluções é $m \cdot k$. Como cada conjunto de botões é a solução de exatamente uma configuração, concluímos que o número total de conjuntos de botões é $m \cdot k$.

O número total de conjuntos de botões é $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, logo $m \cdot k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Portanto, $k$ deve ser uma potência de 2, isto é, $k = 2^\ell$ para algum inteiro $\ell$ com $0 \leq \ell \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

*Observação* 3.2. Na propriedade anterior, o intervalo $0 \leq \ell \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$ pode ser refinado. De fato, não é difícil verificar que necessariamente $\ell \leq n$. Um argumento simples consiste em observar que dois elementos distintos do núcleo devem diferir em pelo menos um botão da última linha do arranjo triangular, que contém exatamente $n$ botões.

Diremos que o núcleo tem dimensão $\ell$ quando possui exatamente $2^\ell$ elementos. A Tabela 1 apresenta os valores dessa dimensão para $1 \leq n \leq 80$. Por exemplo, para

$n = 5$ observamos que $\ell = 2$, o que significa que o núcleo contém $2^2 = 4$ elementos. Esses elementos estão representados na Figura 5.

| $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ | $n$ | $\ell$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 11 | 0 | 21 | 0 | 31 | 0 | 41 | 0 | 51 | 0 | 61 | 20 | 71 | 6 |
| 2 | 2 | 12 | 4 | 22 | 4 | 32 | 0 | 42 | 2 | 52 | 0 | 62 | 42 | 72 | 0 |
| 3 | 0 | 13 | 4 | 23 | 0 | 33 | 2 | 43 | 4 | 53 | 0 | 63 | 0 | 73 | 4 |
| 4 | 0 | 14 | 10 | 24 | 0 | 34 | 2 | 44 | 0 | 54 | 20 | 64 | 0 | 74 | 2 |
| 5 | 2 | 15 | 0 | 25 | 0 | 35 | 0 | 45 | 0 | 55 | 20 | 65 | 0 | 75 | 0 |
| 6 | 4 | 16 | 0 | 26 | 10 | 36 | 4 | 46 | 10 | 56 | 18 | 66 | 4 | 76 | 10 |
| 7 | 0 | 17 | 0 | 27 | 0 | 37 | 0 | 47 | 2 | 57 | 0 | 67 | 0 | 77 | 0 |
| 8 | 0 | 18 | 2 | 28 | 8 | 38 | 4 | 48 | 0 | 58 | 18 | 68 | 4 | 78 | 10 |
| 9 | 0 | 19 | 8 | 29 | 10 | 39 | 0 | 49 | 0 | 59 | 0 | 69 | 0 | 79 | 0 |
| 10 | 2 | 20 | 0 | 30 | 20 | 40 | 16 | 50 | 2 | 60 | 20 | 70 | 4 | 80 | 0 |

Tabela 1: Dimensão do núcleo para jogos de tamanho 1 a 80.

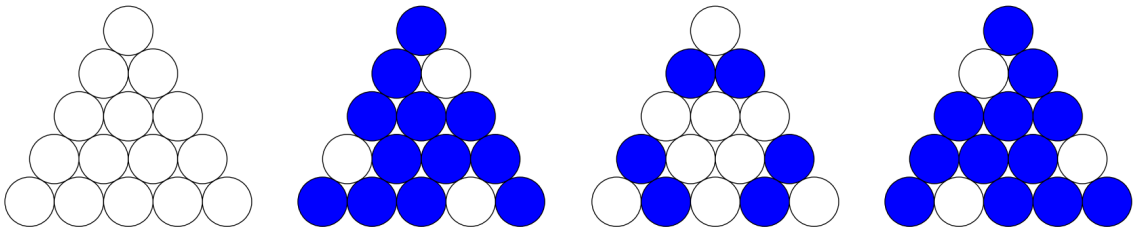


Figura 5: Elementos do núcleo do jogo de tamanho $n = 5$.

Para $n = 22$ temos $\ell = 4$. Isso significa que o núcleo possui $2^4 = 16$ elementos, representados na Figura 6. Esse caso é interessante porque todos os elementos exibem simetrias claras. Para $n = 19$ o núcleo possui $2^8 = 256$ elementos. Na Figura 7 mostramos alguns deles. Observamos que alguns apresentam simetria evidente e outros não exibem nenhum padrão aparente.

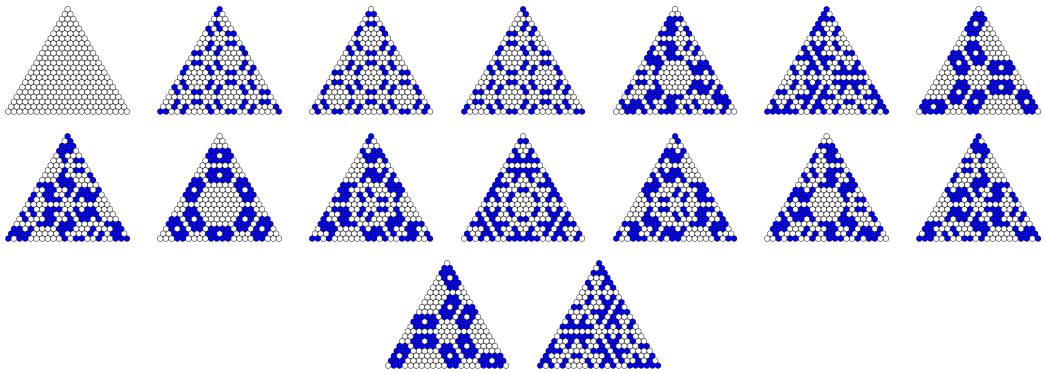


Figura 6: Elementos do núcleo do jogo de tamanho $n = 22$.

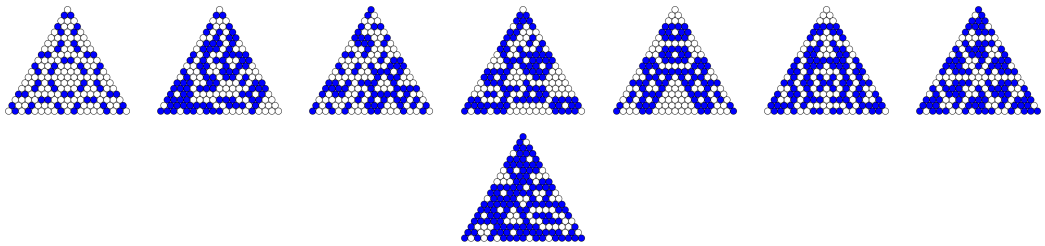


Figura 7: Alguns elementos do núcleo do jogo de tamanho $n = 19$.

Mesmo com poucos exemplos, é possível perceber certos desenhos recorrentes nas figuras simétricas. Alguns desses padrões surgem em jogos de diferentes tamanhos. As Figuras 8 e 9 ilustram alguns desses casos.

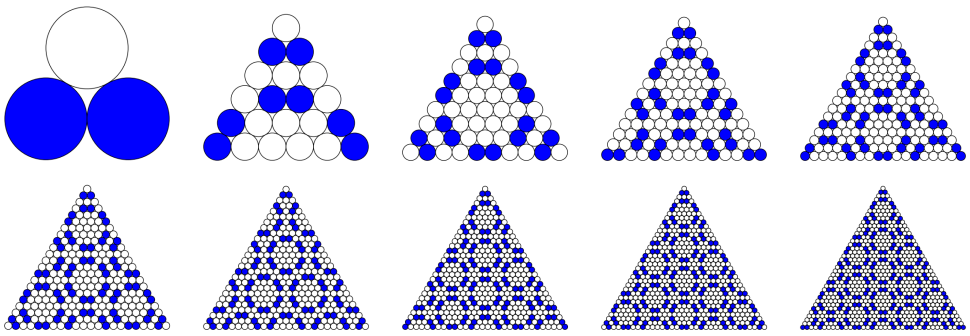


Figura 8: Alguns padrões.

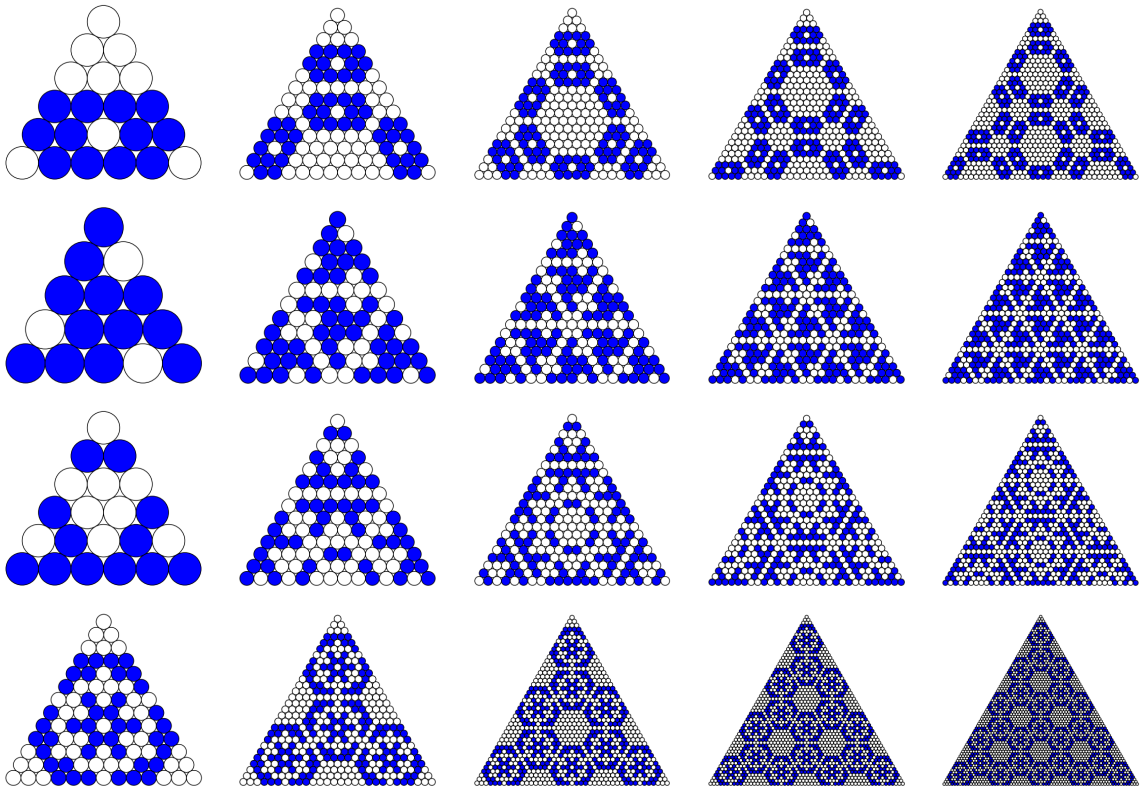


Figura 9: Mais padrões.

Desejamos compreender a natureza desse fenômeno, isto é, investigar como esses padrões surgem e de que forma se propagam. A observação da sequência apresentada na Figura 8 aponta para alguma regularidade estrutural. Nela, os jogos possuem tamanhos 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34 e 38. Esses valores sugerem que jogos de tamanho da forma $4j + 2$ apresentam elementos do núcleo que exibem padrões semelhantes. Isso, de fato, ocorre.

Ainda na Figura 8, o mecanismo de propagação dos padrões nem sempre é evidente, em grande parte porque a maior parte dos botões não aparece colorida. Já na Figura 9, especialmente na segunda e na terceira linhas, esse mecanismo torna-se bastante claro. O padrão visível é obtido pela repetição de elementos do núcleo de jogos menores e de suas simetrias, separados por uma fileira de botões não utilizados. A Figura 10 ilustra explicitamente esse processo. As setas e cores indicam quais rotações e reflexões são aplicadas aos padrões menores para compor o elemento observado nos jogos maiores.

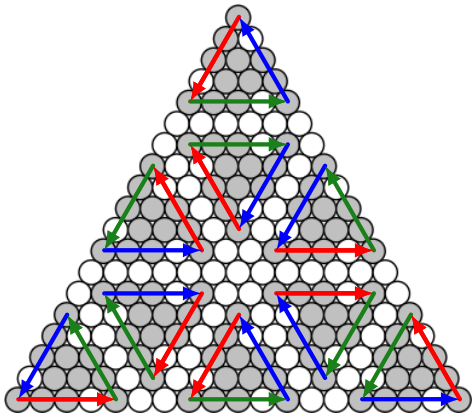


Figura 10: Um mecanismo da propagação de padrões.

Essas observações motivam o resultado a seguir.

**Teorema 3.3.** *Se um jogo de tamanho $n$ possui núcleo não trivial, então o mesmo ocorre para todos os jogos de tamanho $n + (n + 2)j$, para todo inteiro $j \geq 1$.*

*Demonstração.* Seja $T$ um elemento do núcleo de um jogo de tamanho $n$. Pela simetria do arranjo triangular, qualquer reflexão de $T$ ao longo das alturas e qualquer rotação de $T$ também pertence ao núcleo. Para cada inteiro $k \geq 1$, construiremos um elemento do núcleo de um jogo de tamanho $n + (n + 2)j$ a partir de cópias de $T$ e de suas simetrias.

A construção está ilustrada na Figura 10. Nela, cada região triangular marcada por setas corresponde a um bloco de tamanho $n$ formado por $T$ ou por alguma de suas simetrias. Esses blocos são dispostos de modo a preencher uma triangulação maior e são separados por linhas de largura 1 compostas inteiramente por botões não utilizados. Seja $X$ o conjunto de botões obtido ao reunir todos esses blocos, vamos mostrar que $X$ pertence ao núcleo do jogo de tamanho $n + (n + 2)j$.

Considere um botão arbitrário $b$. Se $b$ pertence ao interior de um dos blocos triangulares, então os únicos botões de $X$ que afetam $b$ são aqueles pertencentes ao próprio bloco. Como esse bloco é uma cópia de $T$ ou de uma de suas simetrias, ele é um elemento do núcleo do jogo de tamanho $n$. Assim, pressionar os botões desse bloco deixa o estado de $b$ inalterado.

Resta considerar os botões que pertencem às linhas divisórias entre os blocos. Nenhum desses botões está contido em $X$. Além disso, cada um deles tem um número par de vizinhos em $X$. Isso ocorre porque tais botões estão na fronteira entre dois blocos congruentes por reflexão e isso garante que os vizinhos presentes em $X$ aparecem em pares simétricos em torno de $b$. Como pressionar dois vizinhos idênticos não altera o estado de $b$, o resultado final para esses botões também coincide com seu estado inicial.

Concluímos que, para qualquer botão $b$, pressionar os botões de $X$ não altera o estado de $b$. Portanto, $X$ pertence ao núcleo do jogo de tamanho $n + (n + 2)j$, o que completa a prova. □

Para encerrar esta seção, observamos que existem muitos outros mecanismos de propagação de padrões. Para jogos de tamanho $2^j - 3$, com $j \geq 3$, é possível construir um elemento do núcleo cujo desenho lembra o fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski. Esse caso aparece na Figura 11.

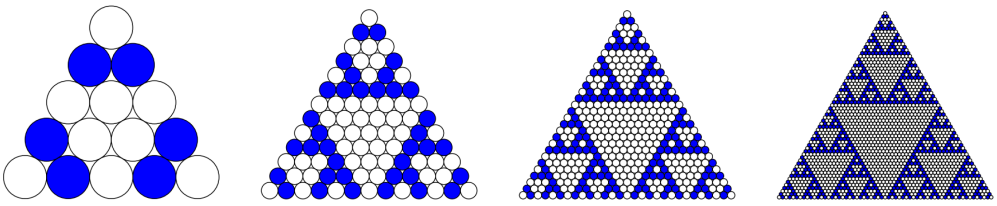


Figura 11: Elementos do núcleo que lembram o Triângulo de Sierpinski.

Diversas outras formas também podem ser obtidas. Entre as figuras simétricas, a maior parte das imagens visualmente marcantes apresenta padrões que lembram um caleidoscópio, como as duas primeiras da Figura 12. Há ainda configurações com aparência menos usual, como a terceira imagem da mesma figura, cujo arranjo sugere a forma de uma aranha. Esses exemplos mostram a variedade surpreendente de padrões e ilustram a riqueza visual dos elementos do núcleo.

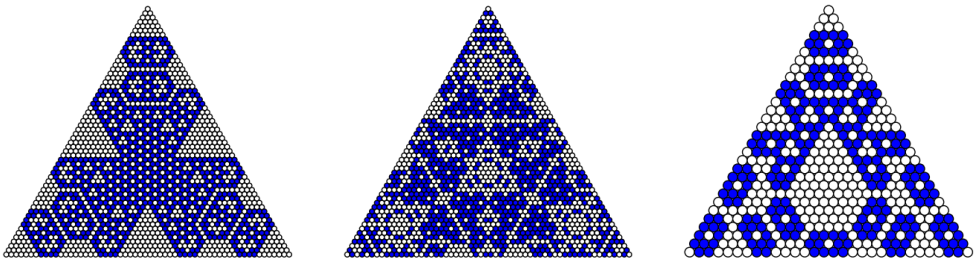


Figura 12: Caleidoscópio e Aranha.

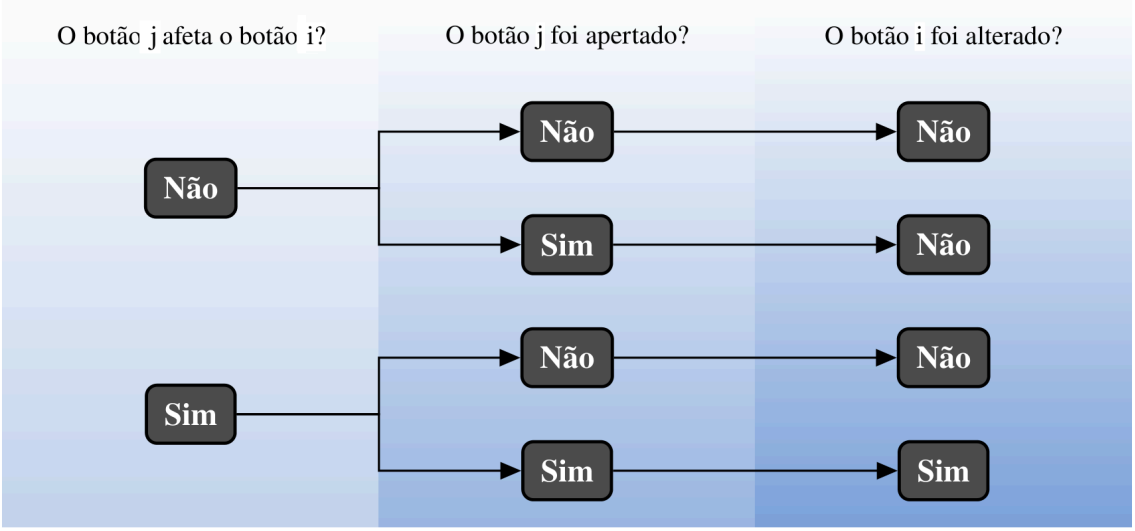
# 4 Álgebra Linear

Nesta seção vamos descrever o jogo por meio de sistemas lineares. Em um jogo de tamanho $n$ existem $\beta = \frac{n(n+1)}{2}$ botões, e cada um deles pode estar aceso ou apagado.

Para fins de referência, enumeraremos os botões de 1 até $\beta$.

Nosso objetivo é o seguinte. Dada uma configuração inicial, isto é, uma escolha de estados aceso ou apagado para cada um dos $\beta$ botões, desejamos determinar quais botões devem ser pressionados para que, ao final, todos se encontrem apagados. Pelos resultados da Seção 2, sabemos que a ordem dos pressionamentos não altera o resultado. Portanto, o que realmente importa é somente o conjunto de botões que serão pressionados.

Fixemos agora um botão $i$. Para compreender como seu estado final será determinado, analisamos os efeitos que cada botão $j$ pode exercer sobre ele. Existem quatro possibilidades, que representamos no fluxograma abaixo. Em cada caso, indicamos se $j$ afeta ou não o estado de $i$, e se o botão $j$ é ou não pressionado.




Das quatro situações descritas no fluxograma, observamos que as três primeiras não produzem qualquer alteração no estado do botão $i$. Apenas a quarta situação, na qual o botão $j$ afeta $i$ e é de fato pressionado, modifica seu estado. Para traduzir essas possibilidades para uma linguagem algébrica, introduzimos a seguinte notação.

Associamos a cada solução uma coleção de números

$$x_1, x_2, \ldots, x_\beta,$$

onde cada $x_j$ pode assumir apenas os valores 0 ou 1. Interpretamos $x_j = 0$ como "o botão $j$ não foi pressionado"e $x_j = 1$ como "o botão $j$ foi pressionado". Precisamos também indicar quais botões influenciam o estado de quais outros. Para isso, definimos os coeficientes $a_{ij}$ por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se pressionar o botão } j \text{ altera o estado do botão } i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo fluxograma, o estado do botão $i$ é alterado por $i$ somente quando $x_j = 1$ e $a_{ij} = 1$. Em particular,

$$a_{ij}x_j = \begin{cases} 0, & \text{se o botão } j \text{ não altera o estado de } i, \\ 1, & \text{se o botão } j \text{ altera o estado de } i \text{ e foi pressionado.} \end{cases}$$

Assim, a soma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\beta}x_\beta$$

conta exatamente quantas vezes o estado do botão $i$ foi modificado ao longo da solução. Como cada modificação troca o estado de aceso para apagado ou vice-versa, o valor dessa soma determina o estado final de $i$: se a soma é par, o estado final coincide com o inicial; se é ímpar, o estado final difere do inicial.

Observamos que, para determinar o estado final de $i$, importa apenas a paridade da soma

$$a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{i\beta}x_\beta.$$

Por essa razão, a partir deste ponto trabalharemos módulo 2. Em particular, todo resultado de soma será 0 (caso par) ou 1 (caso ímpar), de modo que $1+1=0$, $1+0=0+1=1$ e $0+0=0$. Essa aritmética corresponde exatamente ao comportamento do jogo: pressionar um botão equivale a somar 1 ao estado atual, trocando aceso por apagado e apagado por aceso.

Seja $c_i$ o estado inicial do botão $i$, com $c_i = 0$ para apagado e $c_i = 1$ para aceso. O estado final de $i$ é então dado por

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\beta}x_\beta + c_i.$$

O vetor $(x_1, \ldots, x_\beta)$ resolve o problema quando todos os estados finais são iguais a zero. Portanto,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\beta}x_\beta + c_i = 0 \qquad \text{para todo } i.$$

Reunindo essas $\beta$ equações, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\beta}x_\beta + c_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\beta}x_\beta + c_2 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{\beta 1}x_1 + a_{\beta 2}x_2 + \cdots + a_{\beta\beta}x_\beta + c_\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\beta} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & \cdots & a_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em notação matricial, escrevemos

$$A = (a_{ij}), \quad x = (x_1, \ldots, x_\beta) \quad \text{e} \quad c = (c_1, \ldots, c_\beta);$$

assim, o sistema assume a forma compacta $Ax + c = 0$, que equivale (estamos em módulo 2!) a $Ax = c$.

A questão fundamental passa a ser: para quais vetores $c$ o sistema admite solução? Da álgebra linear, sabemos que, se a matriz $A$ é invertível, então existe uma única solução para todo $c$ (Lay et al., 2018, Seção 2.2, Teorema 5). Obtemos, assim, o seguinte resultado.

**Teorema 4.1.** *Um jogo de tamanho $n$ admite solução única para qualquer configuração inicial se, e somente se, a matriz $A = (a_{ij})$ é invertível.*

Antes de prosseguirmos, vamos relacionar a linguagem dessa seção com a linguagem utilizada nas seções anteriores. Se $C$ é uma configuração inicial e $X$ é um conjunto de botões que a resolve, escrevemos $C \xrightarrow{X} \emptyset$. À configuração $C$ associamos o vetor $c = (c_1, \ldots, c_\beta)$ e ao conjunto de botões $X$ associamos o vetor $x = (x_1, \ldots, x_\beta)$. Como visto acima, a condição para que $X$ apague todas as luzes é $Ax + c = 0$. Assim, a operação $C \xrightarrow{X} \emptyset$ é registrada pela equação $Ax + c = 0$. As duas linguagens descrevem o mesmo fenômeno.

Mais geralmente, uma operação do tipo $C \xrightarrow{X} D$ corresponde à igualdade

$$Ax + c = d,$$

onde $Ax$ representa o conjunto de botões cujo estado é alterado pelo pressionamento de $X$. Ao somá-lo com $c$, obtemos o estado final $d$ associado à configuração $D$.

Consideremos agora uma cadeia de operações, $C \xrightarrow{X} E \xrightarrow{Y} D$. Também podemos escrever

$$\begin{cases} Ax + c = e, \\ Ay + e = d. \end{cases}$$

Somando essas duas igualdades módulo 2, obtemos $A(x+y)+c = d$. Portanto, pressionar os botões de $X$ seguidos dos de $Y$ produz o mesmo efeito que pressionar o conjunto de botões descrita por $x + y$. Pela aritmética módulo 2, o vetor $x + y$ corresponde à diferença simétrica $X \triangle Y$. Assim,

$$C \xrightarrow{X \triangle Y} D,$$

como já sabíamos da seção anterior. Em termos algébricos, a aplicação que associa a cada conjunto de botões $X$ o vetor $x$ é um homomorfismo de grupos (as operações de grupo aqui são a diferença simétrica de conjuntos e a soma de vetores).

Vejamos um exemplo. Na Figura 13 aparece um estado de um jogo de tamanho 3 juntamente com uma possível enumeração dos seus seis botões. Suponhamos que

pressionamos os botões 3 e 4. Isso altera os estados dos botões 1, 3, 4 e 6, produzindo a configuração mostrada na Figura 14.

Vamos descrever essa mesma operação com matrizes e vetores. Para a enumeração adotada, a matriz $A$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Pressionar os botões 3 e 4 corresponde ao vetor $x = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$. Calculando $Ax$, obtemos

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esse vetor indica exatamente quais botões terão seus estados trocados: os índices 1, 3, 4 e 6, como esperado.

Se a configuração inicial é representada pelo vetor

$$c = (0, 1, 0, 0, 0, 1),$$

então a configuração final é dada por

$$Ax + c = (1, 1, 1, 1, 0, 0),$$

que coincide com a situação ilustrada na Figura 14.

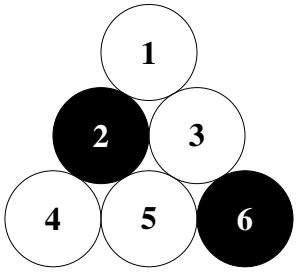



Figura 13: Uma configuração do jogo de tamanho $n = 3$.

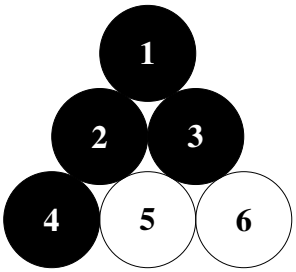



Figura 14: A configuração obtida ao se pressionar os botões 3 e 4 na Figura 13.

Vamos agora analisar os elementos do núcleo discutidos nas seções anteriores. Recordamos que um conjunto de botões $X$ pertence ao núcleo quando, para qualquer configuração $B$, vale

$$C \xrightarrow{X} C,$$

isto é, pressionar os botões de $X$ não produz alteração alguma. Na linguagem de sistemas lineares, isso significa

$$Ax + c = c,$$

ou seja, $Ax = 0$. Portanto, os elementos do núcleo da matriz $A$ correspondem exatamente aos elementos do o núcleo do jogo (o que justifica a terminologia).

Da álgebra linear, sabemos que $A$ é invertível se, e somente se, o sistema homogêneo $Ax = 0$ possui apenas a solução trivial. Além disso, para qualquer $c$, o sistema $Ax = c$ tem o mesmo número de soluções que o sistema homogêneo. Como estamos trabalhando módulo 2, o núcleo é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$, e, portanto, possui cardinalidade $2^\ell$ para algum $\ell$. Essa é precisamente a propriedade 2.4 apresentada na Seção 2. O algoritmo empregado para gerar as figuras da seção anterior consiste em calcular o núcleo da matriz $A$ correspondente.

Passamos agora ao estudo explícito do núcleo de $A$, que denotaremos por $\mathcal{N}(A)$, para alguns valores de $n$. A fim de diferenciar, usaremos $A_n$ em lugar de $A$. Para padronizar, consideraremos sempre a enumeração dos botões de cima para baixo e da esquerda para a direita, como nas Figuras 1 e 13.

Para $n = 1$ há apenas um botão, e toda configuração possui solução única. A matriz é

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

que é invertível, e, portanto, $\mathcal{N}(A_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $n = 2$ há três botões, e obtemos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O núcleo é

$$\mathcal{N}(A_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

e seus elementos aparecem ilustrados na Figura 4.

Como existem $2^3 = 8$ configurações possíveis e o núcleo possui 4 elementos, segue da Propriedade 2.4 que cada configuração solúvel admite exatamente 4 soluções. Consequentemente, apenas duas configurações são solúveis, mostradas na Figura 15. As demais, representadas na Figura 16, não possuem solução.

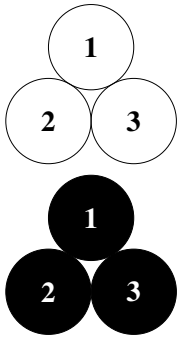



Figura 15: Configurações solúveis do jogo de tamanho $n = 2$.

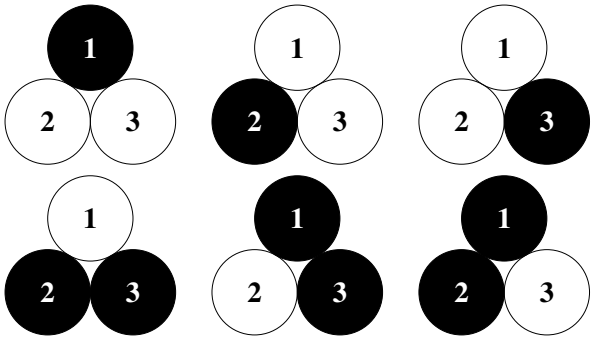



Figura 16: Configurações insolúveis do jogo de tamanho $n = 2$.

Para $n = 3$, a matriz $A_3$ é a apresentada na Equação (4.1). Nesse caso, $A_3$ é invertível. O mesmo ocorre para $n = 4$, isto é, $A_4$ também é invertível. Para $n = 5$, o núcleo de $A_5$ possui exatamente quatro elementos, representados na Figura 5 da seção anterior. Para valores maiores de $n$, os cálculos tornam-se rapidamente pouco manejáveis. Porém, ao inspecionarmos explicitamente as matrizes $A_1, \ldots, A_5$, torna-se visível um padrão: com a enumeração que adotamos, cada matriz $A_n$ é incorporada como bloco de $A_{n+1}$.

Esta propriedade decorre diretamente da estrutura geométrica do tabuleiro e da convenção de indexação adotada. Como os botões são numerados sequencialmente de

cima para baixo, linha por linha, a inclusão de uma nova linha na base do triângulo para gerar o jogo de tamanho $n+1$ preserva integralmente os índices e as relações de vizinhança de todos os botões preexistentes. Como a vizinhança entre quaisquer dois botões das primeiras $n$ linhas não é afetada pela adição da $(n+1)$-ésima linha, as entradas correspondentes na submatriz principal de ordem $\frac{n(n+1)}{2}$ de $A_{n+1}$ são idênticas às de $A_n$. Assim, a matriz do jogo de tamanho $n+1$ pode ser escrita de forma particionada em blocos como:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

onde $B$ é uma matriz de dimensões $\frac{n(n+1)}{2} \times (n+1)$ que mapeia as interações entre os botões antigos e os botões da nova linha de base, e $D$ é uma matriz de ordem $n+1$ descrevendo as adjacências estritamente entre os botões da própria última linha.

Para ilustrar esse fenômeno, apresentamos a seguir a matriz $A_6$, na qual destacamos os blocos correspondentes a $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Também destacamos todas as entradas não nulas.

$$A_6 = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|ccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

Encerramos esta seção com um resultado cuja demonstração combina ferramentas de álgebra linear com um problema clássico de combinatória. Uma formulação semelhante para o jogo em arranjo quadrangular é apresentada em [4]. Foi a partir dessa fonte que tomamos conhecimento do resultado, cuja simplicidade e elegância nos surpreenderam e motivaram sua inclusão aqui na versão correspondente para o arranjo triangular.

Antes de enunciarmos o teorema, definimos partição de um conjunto e recobrimento de um tabuleiro por peças $1 \times 1$ e $2 \times 1$.

**Definição 4.2.** Uma partição de um conjunto finito não vazio $S$ é uma coleção de subconjuntos não vazios de $S$, disjuntos dois a dois, cuja união resulta no próprio conjunto $S$.

**Definição 4.3.** Um recobrimento do tabuleiro triangular por peças $1 \times 1$ e $2 \times 1$ é uma partição do conjunto de índices de botões $\{1, 2, \ldots, \beta\}$ em subconjuntos contendo um único índice ou dois índices correspondentes a botões vizinhos.

Por exemplo, no caso $n = 4$, a Figura 17 ilustra um recobrimento possível, que corresponde à partição $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5, 9\}, \{6, 10\}, \{7, 8\}$ de $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

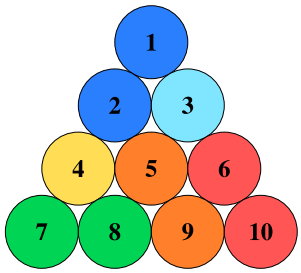



Figura 17: Uma maneira de cobrir o tabuleiro do jogo de tamanho $n = 4$ com peças $1 \times 1$ e $2 \times 1$.

**Teorema 4.4.** *Um jogo de tamanho n possui solução para toda configuração se, e somente se, o número de recobrimentos do tabuleiro triangular por peças* $1 \times 1$ *e* $2 \times 1$ *é ímpar.*

Para a demonstração deste teorema, faremos uso da conhecida fórmula de Leibniz para determinantes (Boldrini et al., 1984, Seção 3.3, Definição 3.4.1), a qual expressa o determinante de uma matriz quadrada em termos de permutações. Relembramos que uma permutação $\sigma \in S_\beta$ é dita involutiva (ou uma involução) se ela coincide com a sua própria inversa, ou seja, se $\sigma^2 = \mathrm{id}$, o que implica que seus ciclos disjuntos possuem comprimento no máximo 2.

*Demonstração.* Sabemos que o jogo de tamanho $n$ admite solução para toda configuração se, e somente se, a matriz $A$ é invertível. Como estamos trabalhando módulo 2, isso ocorre exatamente quando $\det A = 1$.

Pela fórmula de Leibniz,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_\beta} a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{\beta\sigma(\beta)},$$

onde $S_\beta$ é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, \beta\}$. Em módulo 2, o sinal da permutação não é relevante. Cada termo da soma vale 0 ou 1, e vale 1 exatamente quando

$$a_{1\sigma(1)} = a_{2\sigma(2)} = \cdots = a_{\beta\sigma(\beta)} = 1.$$

Recordamos que $a_{ij} = 1$ apenas quando $i = j$ ou quando os botões $i$ e $j$ são vizinhos. Assim, seja $V$ o conjunto das permutações $\sigma$ tais que, para todo $j$, o índice $\sigma(j)$ coincide com $j$ ou com um vizinho de $j$. Para essas permutações, o termo correspondente na soma do determinante é igual a 1; para as demais, é igual a 0. Portanto,

$$\det A = \sum_{\sigma \in V} 1.$$

Agora observamos que, se $\sigma \in V$, então $\sigma^{-1} \in V$, pois a vizinhança é uma relação simétrica. Além disso, se $\sigma \neq \sigma^{-1}$, os dois termos correspondentes na soma se cancelam em módulo 2. Logo, apenas as permutações involutivas contribuem efetivamente para o valor final do determinante. Denotando por $W$ o conjunto das permutações $\sigma \in V$ tais que $\sigma = \sigma^{-1}$, temos:

$$\det A = \sum_{\sigma \in W} 1.$$

Cada permutação $\sigma \in W$ é uma involução sem pontos fixos múltiplos, portanto sua decomposição em ciclos consiste unicamente de ciclos de comprimento 1 e 2. Além disso, como $\sigma \in V$, sempre que ocorre um ciclo transposto $(i\,\sigma(i))$, os índices $i$ e $\sigma(i)$ correspondem a botões vizinhos. Assim, cada $\sigma \in W$ determina um recobrimento do tabuleiro por peças $1 \times 1$ (os ciclos de comprimento 1) e $2 \times 1$ (os ciclos de comprimento 2). Reciprocamente, cada recobrimento define uma permutação involutiva em $W$.

Portanto, o número de elementos de $W$ coincide com o número de recobrimentos do tabuleiro. Como

$$\det A = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |W| \text{ é ímpar},$$

segue que o jogo tem solução para toda configuração exatamente quando o número de recobrimentos é ímpar, como desejado. □

Em resumo, as construções apresentadas nesta seção estabelecem uma ponte rigorosa entre a álgebra linear dos sistemas de equações e a combinatória geométrica do tabuleiro triangular. Uma vez que as propriedades estruturais da matriz de coeficientes já determinam integralmente a solubilidade do jogo, a aplicação da fórmula de Leibniz permitiu restringir o somatório do determinante apenas às permutações associadas a recobrimentos válidos por peças $1 \times 1$ e $2 \times 1$. Dessa forma, a associação de cada configuração de botões a um elemento do grupo simétrico por meio de permutações involutivas elimina os termos nulos da expansão algébrica e confere uma elegante interpretação combinatória ao resultado matricial previamente estabelecido.

# 5 Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos a solubilidade de um jogo combinatório em um tabuleiro triangular, partindo de suas regras fundamentais e de uma análise estrutural de suas configurações iniciais nas primeiras seções. A modelagem algébrica permitiu traduzir a dinâmica do jogo em um sistema linear associado, cuja solubilidade única foi rigorosamente caracterizada pelas propriedades matriciais e pelos critérios de equivalência estabelecidos pela álgebra linear. Obtivemos que um jogo tem solução, qualquer que seja sua configuração inicial, se, e somente se, a matriz que o modela é inversível. Também foi possível estabelecer resultados no caso em que algumas configurações não possuem solução, nesse contexto, duas configurações distintas que possuem solução possuem o mesmo número de soluções e esse número é igual à quantidade de elementos no núcleo da matriz que modela o jogo. Como desdobramento complementar a essa estrutura algébrica principal, a aplicação da fórmula de Leibniz ofereceu uma caracterização combinatória para o problema, conectando os resultados puramente matriciais à própria geometria e disposição dos recobrimentos sobre o tabuleiro.

Como perspectivas para a continuidade desta pesquisa, destacam-se três frentes principais de investigação:

- Propriedades do núcleo da matriz: investigar a estrutura algébrica do núcleo da matriz de coeficientes quando o sistema não possui solução única. Em particular, busca-se compreender se a dimensão do núcleo é sempre par e se ela é ou não limitada.

- Classificação dos jogos solúveis: desenvolver um algoritmo ou critério fechado capaz de classificar, de acordo com o tamanho do tabuleiro triangular, quais jogos sempre admitirão solução para qualquer configuração inicial.

- Extensão para outras geometrias: generalizar o modelo matricial e as bijeções por involuções para tabuleiros com outras simetrias ou malhas poligonais distintas.

## Contribuição dos Autores

Os autores contribuíram de forma substancial para o desenvolvimento e a execução deste trabalho. A coautora T. Marcarini idealizou a mecânica original do jogo combinatório e realizou a sua formulação inicial como problema para a Olimpíada Capixaba de Matemática (OCMAT). O coautor C. Morais tomou a iniciativa de estabelecer a relação formal entre o jogo e a álgebra linear. Ambos os autores participaram ativamente das discussões teóricas, da análise crítica e da validação final dos resultados matemáticos obtidos.

## Agradecimentos

Agradecemos a toda a equipe envolvida na organização da OCMAT, em especial aos professores Fábio Júlio Valentim, Florêncio Guimarães, Luzia Maria Casati, Moacir Rosado e Valmecir Bayer, integrantes da equipe acadêmica, pelas discussões, encorajamento e contribuições ao longo de todo o processo. Agradecemos também à FAPES e à SEDU-ES pelo apoio institucional à realização da OCMAT 2025.

## Referências

[1] Boinde, W.; Minevich, I.; Poudel, D. *Lights Out Puzzle in p Colors: Evolution of Quiet Patterns*. Arxiv preprint, 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2510.23677>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[2] Forrest, B.; Goyal, R. *Lights Out on Nearly Complete Graphs*. Arxiv preprint, 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2508.09341>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[3] Vieira Morais, C. H. *OCMAT 2025 - Botões Luminosos*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/smuvjpkc>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[4] Scherphuis, J. *Lights Out*. Jaap's Puzzle Page. Disponível em: <https://www.jaapsch.net/puzzles/lights.htm>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[5] *Lights Out (game)*. Wikipedia, 2025. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game)>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[6] *Olimpíada Capixaba de Matemática*. Matemática na Rede, 2025. Disponível em: <https://matematicanarede.sedu.es.gov.br/ocmat>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[7] *Provas e Soluções*. OBMEP, 2025. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 7 de dezembro de 2025.

[8] Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2018). *Álgebra linear e suas aplicações* (5. ed.). LTC.

[9] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., & Wetzler, H. G. (1984). *Álgebra linear* (3ª ed.). Harbra.

Recebido em 31 de Março de 2026
Aceito em 10 de Outubro de 2026