

TEOREMA DE PICK PARA RETICULADOS BIDIMENSIONAIS E UM CRITÉRIO LINEAR PARA REGIÕES DE VORONOI

PICK'S THEOREM FOR TWO-DIMENSIONAL LATTICES AND A LINEAR CRITERION FOR VORONOI REGIONS

Eleonesio Strey

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Matemática Pura e Aplicada,
Alegre, Espírito Santo, Brasil

eleonesio.strey@ufes.br

Giselle Strey

Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, Alegre, Espírito Santo, Brasil

giselle.sarstrey@educador.edu.es.gov.br

Handled by M. Andrade

Resumo

Neste artigo, deduzimos o Teorema de Pick para reticulados bidimensionais arbitrários a partir de sua formulação clássica em $\mathbb{Z}^2$, por meio de transformações lineares invertíveis do plano. Com isso, obtemos uma versão do teorema válida para qualquer reticulado bidimensional $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Em seguida, discutimos a relação entre esse resultado e a área de regiões de Voronoi em dimensão 2. Mostramos que, nos casos retangular e hexagonal regular, a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}_\Lambda) = \det(\Lambda)$ pode ser recuperada por meio do Teorema de Pick, após a construção de transformações lineares invertíveis apropriadas. Além disso, mostramos que esse procedimento linear não se estende ao caso hexagonal não regular, delimitando o alcance do método considerado.

Palavras-chave: teorema de Pick; reticulados bidimensionais; região de Voronoi; transformações lineares; geometria dos números.

Abstract

In this article, we derive Pick's Theorem for arbitrary two-dimensional lattices from its classical formulation on $\mathbb{Z}^2$ by means of invertible linear transformations of the plane. This yields a version of the theorem valid for every two-dimensional lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. We then discuss the relation between this result and the area of Voronoi regions

in dimension 2. We show that, in the rectangular and regular hexagonal cases, the identity $\text{Area}(\mathcal{V}_\Lambda) = \det(\Lambda)$ can be recovered by means of Pick's Theorem, after the construction of suitable invertible linear transformations. Moreover, we show that this linear procedure does not extend to the non-regular hexagonal case, thereby delimiting the scope of the method considered.

Keywords: Pick's theorem; two-dimensional lattices; Voronoi regions; linear transformations; geometry of numbers.

1 Introdução

O Teorema de Pick estabelece uma relação entre a área de um polígono simples com vértices no reticulado inteiro $\mathbb{Z}^2$ e o número de pontos inteiros situados em seu interior e em sua fronteira. Em sua forma clássica, esse resultado afirma que, se $P \subset \mathbb{R}^2$ é um polígono simples com vértices em $\mathbb{Z}^2$, então

$$\text{Area}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1,$$

em que $I(P)$ e $B(P)$ denotam, respectivamente, o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior e na fronteira de P . Desde o trabalho original de Pick [9], esse teorema tem sido um resultado fundamental na geometria discreta e na geometria dos números.

Neste trabalho, tomamos a formulação clássica acima como ponto de partida. Demonstrações do Teorema de Pick para polígonos simples com vértices em $\mathbb{Z}^2$ podem ser encontradas, por exemplo, em [3, 8, 11]. Uma abordagem alternativa, baseada no Teorema de Minkowski dos corpos convexos, pode ser encontrada em [6].

A extensão do Teorema de Pick para reticulados bidimensionais arbitrários já foi considerada na literatura, inclusive com formulação e demonstração detalhadas em [10]. Neste artigo, porém, adotamos uma abordagem distinta: em vez de adaptar diretamente uma demonstração da versão clássica, mostramos como transportá-la de $\mathbb{Z}^2$ para um reticulado bidimensional arbitrário por meio de transformações lineares invertíveis do plano. Para isso, estudamos inicialmente o comportamento de segmentos, triângulos e polígonos simples sob tais transformações, bem como a correspondente fórmula de escala para a área. Em particular, mostramos que transformações lineares invertíveis preservam a estrutura combinatória de polígonos simples, estabelecem bijeções entre os pontos de reticulado situados no interior e na fronteira dos polígonos correspondentes e multiplicam a área pelo valor absoluto do determinante. Como consequência, obtemos a seguinte versão do Teorema de Pick: se $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é um reticulado bidimensional e P é um

polígono simples com vértices em Λ , então

$$\text{Area}(P) = \det(\Lambda) \left(I_{\Lambda}(P) + \frac{1}{2}B_{\Lambda}(P) - 1 \right),$$

em que $I_{\Lambda}(P)$ e $B_{\Lambda}(P)$ denotam, respectivamente, o número de pontos de Λ no interior e na fronteira de P .

Na segunda parte do trabalho, discutimos a relação entre esse resultado e a área da região de Voronoi de um reticulado bidimensional. Em dimensão 2, essa região é um polígono convexo centralmente simétrico, com 4 ou 6 lados. Mostramos que, nos casos em que a região de Voronoi é um retângulo ou um hexágono regular, a identidade

$$\text{Area}(\mathcal{V}_{\Lambda}) = \det(\Lambda)$$

pode ser recuperada por meio do Teorema de Pick, após a construção de transformações lineares invertíveis apropriadas.

O caso hexagonal não regular revela uma limitação natural desse procedimento. Mais precisamente, provamos que a existência de um operador linear bijetor que leva a região de Voronoi $\mathcal{V}$ no polígono

$$\text{conv}\{\pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}$$

caracteriza exatamente o caso hexagonal regular. Assim, o resultado correspondente delimita o alcance do método linear considerado no artigo.

Desse modo, o artigo tem dois objetivos principais: deduzir o Teorema de Pick para reticulados bidimensionais arbitrários a partir do caso clássico em $\mathbb{Z}^2$, por meio de transformações lineares invertíveis, e analisar o uso desse procedimento no estudo da área de regiões de Voronoi em situações geométricas especiais. A contribuição do trabalho está na apresentação unificada desses argumentos, na explicitação do papel das transformações lineares e na identificação da limitação do método no caso hexagonal não regular.

O texto está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, reunimos noções preliminares sobre reticulados bidimensionais e geometria plana. Na Seção 3, estudamos o comportamento de segmentos, triângulos e polígonos simples sob transformações lineares invertíveis, bem como a correspondente fórmula de escala para a área. Na Seção 4, demonstramos o Teorema de Pick para reticulados bidimensionais. Por fim, na Seção 5, discutimos a relação entre esse resultado e a área da região de Voronoi de reticulados bidimensionais, com ênfase nos casos retangular, hexagonal regular e hexagonal não regular.

2 Reti bidimensionais e elementos de geometria plana

Ao longo do texto, identificamos pontos do plano com seus vetores posição em $\mathbb{R}^2$ e usamos indistintamente os termos *ponto* e *vetor*.

Definição 2.1. Um *reticulado bidimensional* é um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ da forma

$$\Lambda = \{m\mathbf{u} + n\mathbf{v} : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

em que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ são vetores linearmente independentes. O par $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é chamado *base* de Λ .

Vale observar que toda base de um reticulado bidimensional Λ é, em particular, uma base de $\mathbb{R}^2$, mas a recíproca não é verdadeira, mesmo quando os vetores considerados pertencem ao próprio reticulado. Além disso, um mesmo reticulado bidimensional admite várias bases. Por exemplo,

$$\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é um reticulado bidimensional e admite como base canônica o conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$, mas também admite outras bases, como $\{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\{(4, 3), (7, 5)\}$. Por outro lado, $\{(2, 0), (0, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, mas não é uma base de $\mathbb{Z}^2$, pois suas combinações lineares inteiras geram apenas os vetores de $\mathbb{Z}^2$ cujas duas coordenadas são pares. Em particular, o vetor $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ não pode ser escrito como combinação linear inteira de $(2, 0)$ e $(0, 2)$.

Definição 2.2. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado bidimensional e seja $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ uma base de Λ . O *determinante* de Λ é definido por

$$\det(\Lambda) = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})|,$$

em que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ denota o determinante da matriz 2×2 cujas colunas são $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Essa definição está bem definida, isto é, $\det(\Lambda)$ não depende da base escolhida para Λ . Além disso, $\det(\Lambda)$ coincide com a área de qualquer *paralelogramo fundamental* associado a Λ [1]. Mais precisamente, se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de Λ , então o conjunto

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} : 0 \leq s, t < 1\}$$

é um paralelogramo fundamental de Λ , e

$$\text{Area}(P(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \det(\Lambda).$$

Lema 2.3. *Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^2$ reticulados bidimensionais e sejam $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ e $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$ bases de Λ_1 e Λ_2 , respectivamente. Então existe uma única transformação linear invertível $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $L(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$ e $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$. Além disso, $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$.*

Demonstração. Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, existe uma única transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $L(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$ e $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ (ver, por exemplo, [2]). Como $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^2$, segue que L é invertível. Se $\mathbf{x} \in \Lambda_1$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathbf{x} = m\mathbf{u}_1 + n\mathbf{v}_1$. Pela linearidade de L , temos

$$L(\mathbf{x}) = mL(\mathbf{u}_1) + nL(\mathbf{v}_1) = m\mathbf{u}_2 + n\mathbf{v}_2 \in \Lambda_2.$$

Logo, $L(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$. Aplicando o mesmo argumento a L^{-1} , obtemos $L^{-1}(\Lambda_2) \subseteq \Lambda_1$, o que equivale a $\Lambda_2 \subseteq L(\Lambda_1)$. Portanto, $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$. $\square$

Fixamos a seguir algumas notações e definições básicas de geometria plana e topologia em $\mathbb{R}^2$, conforme [4]. Para $S \subset \mathbb{R}^2$, denotamos por $\text{int}(S)$ o interior de S , por ∂S a fronteira de S e por $\overline{S}$ o fecho de S . Em particular,

$$\partial S = \overline{S} \setminus \text{int}(S).$$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, denotamos por

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : 0 \leq t \leq 1\}$$

o segmento fechado com extremidades $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, denotamos por $B(\mathbf{x}, r)$ a bola aberta euclidiana de centro $\mathbf{x}$ e raio r , isto é,

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Definição 2.4. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ três pontos não colineares, isto é, tais que os vetores $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ sejam linearmente independentes, ou, equivalentemente,

$$\det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \neq 0.$$

O *triângulo* de vértices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ é o subconjunto

$$\triangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \{(1-s-t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} : s, t \geq 0, s+t \leq 1\}.$$

Essa definição descreve cada ponto do triângulo como combinação convexa de seus vértices, o que será útil no estudo de sua imagem por transformações lineares invertíveis.

Definição 2.5. Um *polígono simples* é um subconjunto $P \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma poligonal fechada simples. Mais precisamente, existem vértices $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, com $n \geq 3$, tais que

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}], \quad \text{onde } \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_1,$$

em que segmentos consecutivos se intersectam apenas no vértice comum, segmentos não consecutivos não se intersectam e segmentos consecutivos não são colineares. O conjunto P é então definido como a união dessa poligonal com a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial P$.

Em particular, todo triângulo é um polígono simples. Além disso, todo polígono simples admite uma triangulação; trata-se de um resultado clássico da geometria plana (ver, por exemplo, [5, 7]).

3 Imagens por transformações lineares invertíveis

O Teorema de Pick para reticulados será deduzido a partir de sua formulação clássica em $\mathbb{Z}^2$, por meio de transformações lineares invertíveis. Para isso, descrevemos como segmentos, triângulos, polígonos simples, interior, fronteira e área se comportam sob tais transformações.

Lema 3.1. Se $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, então

$$L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})].$$

Se, além disso, L é invertível, então

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cap [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \emptyset \implies [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})] \cap [L(\mathbf{c}), L(\mathbf{d})] = \emptyset.$$

Demonstração. Temos $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ se, e somente se, $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para algum $t \in [0, 1]$. Pela linearidade de L ,

$$L(\mathbf{x}) = (1-t)L(\mathbf{a}) + tL(\mathbf{b}),$$

de modo que $L(\mathbf{x}) \in [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})]$. Isso mostra que $L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subseteq [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})]$. A inclusão oposta é obtida do mesmo modo, e portanto

$$L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})].$$

Se L é invertível, então L é injetiva. Assim, se existisse

$$\mathbf{y} \in [L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b})] \cap [L(\mathbf{c}), L(\mathbf{d})],$$

então existiriam $\mathbf{x}_1 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ e $\mathbf{x}_2 \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ tais que $L(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y} = L(\mathbf{x}_2)$. Pela injetividade de L , teríamos $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, o que contradiz a hipótese $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cap [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \emptyset$. $\square$

Lema 3.2. *Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível e sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ pontos não colineares. Então $L(\mathbf{a})$, $L(\mathbf{b})$ e $L(\mathbf{c})$ também são não colineares e*

$$L(\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \Delta(L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b}), L(\mathbf{c})).$$

Demonstração. Se $L(\mathbf{a})$, $L(\mathbf{b})$ e $L(\mathbf{c})$ fossem colineares, então os vetores $L(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ e $L(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ seriam linearmente dependentes. Como L é invertível, seguiria que $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ também seriam linearmente dependentes, em contradição com a hipótese. Logo, $L(\mathbf{a})$, $L(\mathbf{b})$ e $L(\mathbf{c})$ são não colineares. Além disso, $\mathbf{x} \in \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ se, e somente se, existem números reais $s, t \geq 0$, com $s + t \leq 1$, tais que

$$\mathbf{x} = (1 - s - t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}.$$

Pela linearidade de L , $L(\mathbf{x}) = (1 - s - t)L(\mathbf{a}) + sL(\mathbf{b}) + tL(\mathbf{c})$, o que mostra que

$$L(\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) \subseteq \Delta(L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b}), L(\mathbf{c})).$$

Reciprocamente, seja $\mathbf{y} \in \Delta(L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b}), L(\mathbf{c}))$. Então existem números reais $s, t \geq 0$, com $s + t \leq 1$, tais que

$$\mathbf{y} = (1 - s - t)L(\mathbf{a}) + sL(\mathbf{b}) + tL(\mathbf{c}).$$

Novamente pela linearidade de L , $\mathbf{y} = L((1 - s - t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c})$. Como

$$(1 - s - t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} \in \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

segue que $\mathbf{y} \in L(\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$. Portanto,

$$\Delta(L(\mathbf{a}), L(\mathbf{b}), L(\mathbf{c})) \subseteq L(\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})).$$

Isso conclui a demonstração. □

Lema 3.3. *Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível e seja $P \subset \mathbb{R}^2$ um polígono simples. Então $L(P)$ é um polígono simples. Além disso,*

$$L(\text{int}(P)) = \text{int}(L(P)) \quad e \quad L(\partial P) = \partial(L(P)).$$

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, com $n \geq 3$, os vértices de P , de modo que

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^n [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}], \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_1.$$

Pelo Lema 3.1,

$$L(\partial P) = \bigcup_{i=1}^n [L(\mathbf{v}_i), L(\mathbf{v}_{i+1})].$$

Como L é injetiva, preserva o padrão de interseção entre os segmentos e, por ser linear e invertível, preserva colinearidade e não colinearidade. Logo, $L(\partial P)$ é uma poligonal fechada simples. Se C é a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial P$, então

$$P = \partial P \cup C.$$

Como L é um homeomorfismo, $L(C)$ é uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus L(\partial P)$. Além disso, $L(C)$ é limitada, pois transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ levam conjuntos limitados em conjuntos limitados. Portanto,

$$L(P) = L(\partial P) \cup L(C)$$

é um polígono simples.

Como L é um homeomorfismo, leva abertos em abertos. Assim, se $\mathbf{x} \in \text{int}(P)$, existe um aberto U tal que

$$\mathbf{x} \in U \subset P.$$

Segue que

$$L(\mathbf{x}) \in L(U) \subset L(P),$$

com $L(U)$ aberto. Portanto,

$$L(\text{int}(P)) \subseteq \text{int}(L(P)).$$

Aplicando o mesmo argumento a L^{-1} , obtemos a inclusão oposta, isto é,

$$L(\text{int}(P)) = \text{int}(L(P)).$$

Além disso, como L é um homeomorfismo,

$$L(\overline{P}) = \overline{L(P)},$$

e, como L é injetiva, para quaisquer conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ vale

$$L(A \setminus B) = L(A) \setminus L(B).$$

Assim,

$$L(\partial P) = L(\overline{P} \setminus \text{int}(P)) = L(\overline{P}) \setminus L(\text{int}(P)) = \overline{L(P)} \setminus \text{int}(L(P)) = \partial(L(P)).$$

□

Corolário 3.4. *Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível e seja $P \subset \mathbb{R}^2$ um polígono simples. Então toda triangulação de P é levada por L em uma triangulação de $L(P)$.*

Demonstração. Se

$$P = \bigcup_{i=1}^k T_i$$

é uma triangulação de P , então

$$L(P) = \bigcup_{i=1}^k L(T_i).$$

Pelo Lema 3.2, cada $L(T_i)$ é um triângulo. Além disso, pelo Lema 3.3, $\text{int}(L(T_i)) = L(\text{int}(T_i))$ para todo i . Como L é injetiva e os interiores dos triângulos $T_1, \dots, T_k$ são dois a dois disjuntos, segue que, se $i \neq j$,

$$\text{int}(L(T_i)) \cap \text{int}(L(T_j)) = \emptyset.$$

Logo, $L(T_1), \dots, L(T_k)$ constituem uma triangulação de $L(P)$. □

Denotamos por $\det(L)$ o determinante da matriz que representa L em relação a uma mesma base de $\mathbb{R}^2$ no domínio e no contradomínio. Tal valor independe da base escolhida [2].

Lema 3.5. *Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível e seja P um polígono simples. Então*

$$\text{Area}(L(P)) = |\det(L)| \text{Area}(P).$$

Demonstração. Primeiramente, seja $\Delta = \triangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Pelo Lema 3.2, $L(\Delta)$ é o triângulo de vértices $L(\mathbf{a})$, $L(\mathbf{b})$ e $L(\mathbf{c})$. Pela fórmula usual da área,

$$\text{Area}(L(\Delta)) = \frac{1}{2} |\det(L(\mathbf{b} - \mathbf{a}), L(\mathbf{c} - \mathbf{a}))|.$$

Como o determinante é multiplicativo, segue que

$$\det(L(\mathbf{b} - \mathbf{a}), L(\mathbf{c} - \mathbf{a})) = \det(L) \det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

e, portanto,

$$\text{Area}(L(\Delta)) = |\det(L)| \text{Area}(\Delta).$$

Agora, seja P um polígono simples e considere uma triangulação

$$P = T_1 \cup \dots \cup T_k,$$

em que os interiores dos triângulos $T_1, \dots, T_k$ são dois a dois disjuntos. Pelo Corolário 3.4, os conjuntos $L(T_1), \dots, L(T_k)$ constituem uma triangulação de $L(P)$. Em particular,

$$L(P) = \bigcup_{i=1}^k L(T_i),$$

e os interiores dos triângulos $L(T_1), \dots, L(T_k)$ são dois a dois disjuntos. Pela aditividade da área,

$$\text{Area}(L(P)) = \sum_{i=1}^k \text{Area}(L(T_i)).$$

Aplicando a igualdade já estabelecida para triângulos, obtemos

$$\text{Area}(L(P)) = \sum_{i=1}^k |\det(L)| \text{Area}(T_i) = |\det(L)| \sum_{i=1}^k \text{Area}(T_i) = |\det(L)| \text{Area}(P).$$

□

4 Número de Pick e o Teorema de Pick para reticulados bidimensionais

Seja Λ um reticulado bidimensional e seja P um polígono simples com vértices em Λ . Para um conjunto finito A , denotamos por $\#A$ a sua cardinalidade. Definimos

$$I_\Lambda(P) = \#(\Lambda \cap \text{int}(P)), \quad B_\Lambda(P) = \#(\Lambda \cap \partial P),$$

e o *número de Pick* de P relativo a Λ por

$$\Pi_\Lambda(P) = I_\Lambda(P) + \frac{1}{2}B_\Lambda(P) - 1.$$

Exemplo 4.1. Sejam $\Lambda_1 = \mathbb{Z}^2$ e $\Lambda_2 \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado bidimensional gerado por $(1/2, 1)$ e $(2, 1)$. Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear determinada por

$$L(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad L(0, 1) = (2, 1).$$

Pelo Lema 2.3, L é invertível e satisfaz $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$. Além disso,

$$L(x, y) = \left(\frac{x}{2} + 2y, x + y \right).$$

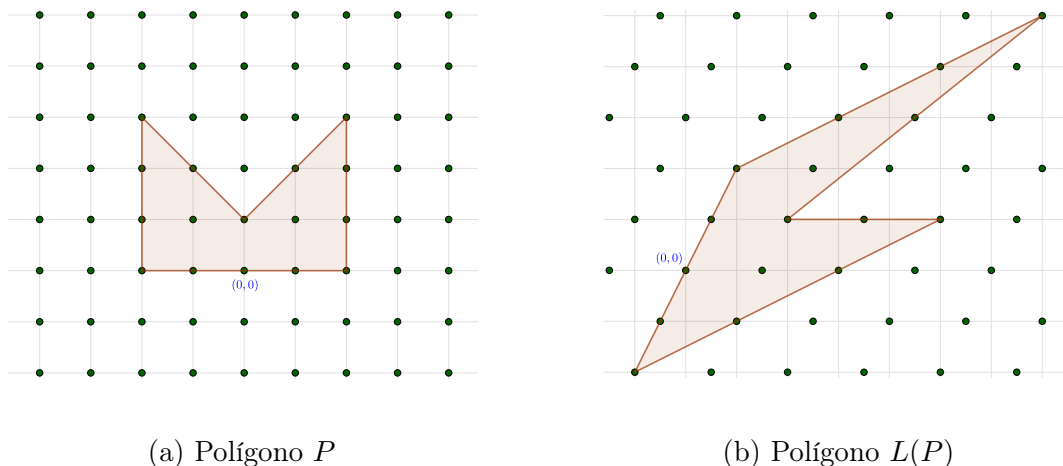
Considere agora o polígono simples P cujos vértices em Λ_1 , listados no sentido anti-horário, são

$$(-2, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 1) \text{ e } (-2, 3),$$

conforme ilustrado na Figura 1(a). Sua imagem $L(P)$, ilustrada na Figura 1(b), tem vértices

$$(-1, -2), (1, 2), (7, 5), (2, 1) \text{ e } (5, 1).$$

Figura 1: Polígono P em $\Lambda_1 = \mathbb{Z}^2$ e sua imagem $L(P)$ no reticulado Λ_2 .



Fonte: Autores (2026).

Contando os pontos de Λ_1 no interior e na fronteira de P , obtemos

$$I_{\Lambda_1}(P) = 2 \quad \text{e} \quad B_{\Lambda_1}(P) = 14,$$

de modo que

$$\Pi_{\Lambda_1}(P) = I_{\Lambda_1}(P) + \frac{1}{2}B_{\Lambda_1}(P) - 1 = 2 + \frac{14}{2} - 1 = 8.$$

Uma contagem direta em $L(P)$ mostra que

$$I_{\Lambda_2}(L(P)) = 2 \quad \text{e} \quad B_{\Lambda_2}(L(P)) = 14,$$

e, portanto,

$$\Pi_{\Lambda_2}(L(P)) = 8.$$

Esse exemplo sugere que o número de Pick permanece invariante sob transformações lineares invertíveis que levam um reticulado bidimensional em outro. Esse fato será formalizado no lema seguinte.

Lema 4.2. *Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^2$ reticulados bidimensionais e seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível tal que $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$. Se P é um polígono simples com vértices em Λ_1 , então $L(P)$ é um polígono simples com vértices em Λ_2 e*

$$\Pi_{\Lambda_2}(L(P)) = \Pi_{\Lambda_1}(P).$$

Em particular, se $L(\Lambda) = \Lambda$, então

$$\Pi_{\Lambda}(L(P)) = \Pi_{\Lambda}(P).$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3, $L(P)$ é um polígono simples, com

$$L(\text{int}(P)) = \text{int}(L(P)) \quad \text{e} \quad L(\partial P) = \partial(L(P)).$$

Como L é bijetiva e satisfaz $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$, segue que

$$L(\Lambda_1 \cap \text{int}(P)) = \Lambda_2 \cap \text{int}(L(P))$$

e

$$L(\Lambda_1 \cap \partial P) = \Lambda_2 \cap \partial(L(P)).$$

Portanto,

$$I_{\Lambda_2}(L(P)) = I_{\Lambda_1}(P) \quad \text{e} \quad B_{\Lambda_2}(L(P)) = B_{\Lambda_1}(P),$$

de modo que

$$\Pi_{\Lambda_2}(L(P)) = \Pi_{\Lambda_1}(P).$$

A afirmação final é o caso particular em que $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$. □

Teorema 4.3 (Teorema de Pick para reticulados bidimensionais). *Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado bidimensional e seja P um polígono simples com vértices em Λ . Então*

$$\text{Area}(P) = \det(\Lambda) \left(I_{\Lambda}(P) + \frac{1}{2} B_{\Lambda}(P) - 1 \right).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.3, existe uma transformação linear invertível $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $L(\mathbb{Z}^2) = \Lambda$. Seja $Q = L^{-1}(P)$. Pelo Lema 3.3, Q é um polígono simples com vértices em $\mathbb{Z}^2$. Usaremos, neste ponto, o Teorema de Pick clássico para polígonos simples com vértices em $\mathbb{Z}^2$ (referências indicadas na Introdução). Assim, $\text{Area}(Q) = \Pi_{\mathbb{Z}^2}(Q)$. Além disso, pelo Lema 4.2, temos $\Pi_{\mathbb{Z}^2}(Q) = \Pi_{\Lambda}(P)$, e, pelo Lema 3.5, temos $\text{Area}(P) = |\det(L)| \text{Area}(Q)$. Como $L(\mathbb{Z}^2) = \Lambda$, segue que $|\det(L)| = \det(\Lambda)$. Portanto,

$$\text{Area}(P) = \det(\Lambda) \Pi_{\Lambda}(P) = \det(\Lambda) \left(I_{\Lambda}(P) + \frac{1}{2} B_{\Lambda}(P) - 1 \right).$$

□

Observação 4.4. Retomando o Exemplo 4.1, o Teorema 4.3 fornece

$$\text{Area}(L(P)) = \det(\Lambda_2) \Pi_{\Lambda_2}(L(P)) = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

5 Um critério linear para regiões de Voronoi em dimensão 2

Nesta seção, discutimos a relação entre o Teorema 4.3 e a área da região de Voronoi $\mathcal{V}_{\Lambda}$ associada a um reticulado bidimensional Λ . A identidade

$$\text{Area}(\mathcal{V}_{\Lambda}) = \det(\Lambda)$$

é clássica e decorre, em geral, do fato de que a região de Voronoi é um domínio fundamental do reticulado; ver, por exemplo, [1]. Nosso objetivo aqui é mais específico: mostrar que, nos casos ortogonal e hexagonal regular, essa identidade pode ser recuperada por meio do Teorema de Pick, após a construção de transformações lineares invertíveis apropriadas, e que tal procedimento não se estende ao caso hexagonal não regular.

Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado bidimensional. Consideramos em $\mathbb{R}^2$ a norma euclidiana e denotamos por

$$\mathcal{V}_{\Lambda} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ para todo } \mathbf{y} \in \Lambda \right\}$$

a *região de Voronoi* de Λ centrada na origem. Para simplificar a notação, escreveremos $\mathcal{V}$ em lugar de $\mathcal{V}_{\Lambda}$. É clássico que $\mathcal{V}$ é um polígono convexo, limitado e centralmente simétrico.

Para cada $\mathbf{w} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, como ambos os lados da desigualdade $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|$ são não negativos, ela é equivalente a $\|\mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2$, ou, ainda, a $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$.

Assim, $\mathcal{V}$ pode ser descrita como a interseção dos semiplanos fechados determinados por essas desigualdades. Em símbolos,

$$\mathcal{V} = \bigcap_{\mathbf{w} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \leq \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{2} \right\}. \quad (5.1)$$

Dizemos que $\mathbf{w} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ é um *vetor relevante de Voronoi* quando a reta

$$H(\mathbf{w}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{2} \right\}$$

suporta um lado de $\mathcal{V}$.

Definição 5.1. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado bidimensional. Diremos que uma base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ de Λ é *Minkowski-reduzida* quando

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| \quad \text{e} \quad 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|^2.$$

Todo reticulado bidimensional admite uma base Minkowski-reduzida (ver, por exemplo, [1]). Fixemos uma tal base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ e, substituindo $\mathbf{v}$ por $-\mathbf{v}$ se necessário, suponhamos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Escrevamos

$$a = \|\mathbf{u}\|^2, \quad b = \|\mathbf{v}\|^2, \quad c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e} \quad d = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = a + b - 2c.$$

Da definição, segue que

$$0 \leq 2c \leq a \leq b. \quad (5.2)$$

Consideremos ainda a transformação linear $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}).$$

Sua matriz, em relação à base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ do domínio e à base canônica do contradomínio, é

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Seu determinante é

$$ab - c^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 > 0,$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, com desigualdade estrita porque $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes. Portanto, Φ é invertível.

Exemplo 5.2. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado bidimensional gerado por $\mathbf{u} = (1, -1)$ e $\mathbf{v} = (3/2, 3/2)$, ilustrado na Figura 2. Como

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 2, \quad \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{9}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

a base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é Minkowski-reduzida. Além disso, como $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, a região de Voronoi associada a Λ é o retângulo azul da Figura 2, cujos vértices são $\pm\mathbf{u}/2 \pm \mathbf{v}/2$, isto é,

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), \quad \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right).$$

Os únicos vetores relevantes de Voronoi são $\pm\mathbf{u}$ e $\pm\mathbf{v}$. Esse exemplo antecipa a proposição seguinte e também a ideia empregada na demonstração da Proposição 5.4: a imagem da região de Voronoi pelo operador linear bijetor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$, é o retângulo de vértices $\pm\mathbf{u} \pm \mathbf{v}$, destacado em marrom na Figura 2.

Proposição 5.3 (Caso ortogonal). *Suponha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Então:*

(i) *a região de Voronoi é o retângulo*

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{a}{2} \text{ e } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}| \leq \frac{b}{2} \right\};$$

(ii) *os únicos vetores relevantes de Voronoi são $\pm\mathbf{u}$ e $\pm\mathbf{v}$;*

(iii) *os vértices de $\mathcal{V}$ são os pontos*

$$\pm\frac{\mathbf{u}}{2} \pm \frac{\mathbf{v}}{2}.$$

Demonstração. Definamos

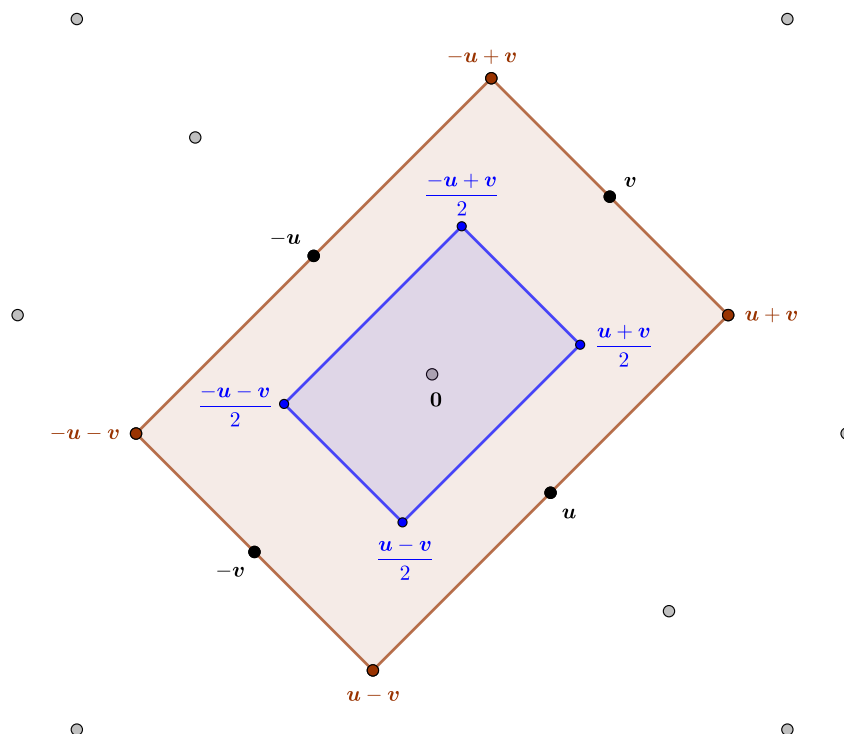
$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{a}{2} \text{ e } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}| \leq \frac{b}{2} \right\}.$$

Como as desigualdades que definem K correspondem aos vetores $\pm\mathbf{u}$ e $\pm\mathbf{v}$, a caracterização (5.1) implica imediatamente que $\mathcal{V} \subset K$. Para provar a inclusão oposta, sejam $\mathbf{x} \in K$ e $\mathbf{w} = m\mathbf{u} + n\mathbf{v} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, temos

$$\|\mathbf{w}\|^2 = m^2a + n^2b \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) + n(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}).$$

Logo,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \leq |m| |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| + |n| |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}| \leq \frac{|m|a}{2} + \frac{|n|b}{2} \leq \frac{m^2a + n^2b}{2} = \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{2}.$$

Figura 2: Reticulado Λ gerado por $\mathbf{u} = (1, -1)$ e $\mathbf{v} = (3/2, 3/2)$, e sua região de Voronoi.


Fonte: Autores (2026).

Pela caracterização (5.1), segue que $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Portanto, $K \subset \mathcal{V}$, e assim $\mathcal{V} = K$, o que prova o item (i).

Além disso, como $\mathcal{V} = K$, seus lados são precisamente os subconjuntos da fronteira em que vale uma das igualdades

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \pm \frac{a}{2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm \frac{b}{2}.$$

Em particular, cada uma das retas $H(\pm \mathbf{u})$ e $H(\pm \mathbf{v})$ suporta um lado de $\mathcal{V}$; logo, $\pm \mathbf{u}$ e $\pm \mathbf{v}$ são vetores relevantes de Voronoi. Como essas quatro retas são duas a duas distintas e correspondem exatamente aos quatro lados de $\mathcal{V}$, não há outros vetores relevantes. Isso prova o item (ii).

Por fim, os vértices de K são os pontos de interseção das retas da forma

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \pm \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm \frac{b}{2}.$$

Se $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$, então, como $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \alpha \|\mathbf{u}\|^2 = \alpha a \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \beta \|\mathbf{v}\|^2 = \beta b.$$

Logo, as equações

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \pm \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm \frac{b}{2}$$

equivalem a $\alpha = \pm 1/2$ e $\beta = \pm 1/2$. Portanto, os vértices de K são exatamente os pontos

$$\pm \frac{\mathbf{u}}{2} \pm \frac{\mathbf{v}}{2}.$$

Isso prova o item (iii). □

No caso ortogonal, a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$ é imediata pela fórmula da área de um retângulo. Ainda assim, essa identidade também pode ser recuperada por meio do Teorema 4.3. De fato, embora $\mathcal{V}$ não tenha vértices em Λ , pela Proposição 5.3 seus vértices são os pontos $\pm \mathbf{u}/2 \pm \mathbf{v}/2$, o que permite deduzi-la com o auxílio de uma transformação linear apropriada. Para o próximo resultado, denotamos por $\text{conv}(A)$ o fecho convexo de $A \subset \mathbb{R}^2$.

Proposição 5.4 (Recuperação da identidade no caso ortogonal). *Sob as hipóteses da Proposição 5.3, vale*

$$\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda).$$

Demonstração. Considere o operador linear bijetor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$. Pela Proposição 5.3, temos $T(\mathcal{V}) = P$, onde

$$P = \text{conv}\{\pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v}\} = \{s\mathbf{u} + t\mathbf{v} : |s| \leq 1 \text{ e } |t| \leq 1\}.$$

Como $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de Λ , todo elemento de Λ se escreve de forma única como $m\mathbf{u} + n\mathbf{v}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Assim, os elementos de Λ na fronteira de P são exatamente

$$\Lambda \cap \partial P = \{m\mathbf{u} + n\mathbf{v} : m, n \in \{-1, 0, 1\} \text{ e } \max\{|m|, |n|\} = 1\},$$

enquanto

$$\Lambda \cap \text{int}(P) = \{\mathbf{0}\}.$$

Logo,

$$B_\Lambda(P) = 8 \quad \text{e} \quad I_\Lambda(P) = 1.$$

Pelo Teorema 4.3,

$$\text{Area}(P) = \det(\Lambda) \left(1 + \frac{8}{2} - 1\right) = 4 \det(\Lambda).$$

Por outro lado, como $\det(T) = 4$, o Lema 3.5 implica

$$\text{Area}(P) = 4 \text{ Area}(\mathcal{V}).$$

Portanto,

$$\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda).$$

□

Passemos agora ao caso $c > 0$. No plano de coordenadas $(p, q) = \Phi(\mathbf{x})$, consideremos o conjunto

$$H' = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq \frac{a}{2}, \quad |q| \leq \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad |q - p| \leq \frac{d}{2} \right\},$$

e definamos

$$K = \Phi^{-1}(H').$$

O próximo lema mostra que H' é um hexágono convexo centralmente simétrico e, portanto, um polígono simples. Como $K = \Phi^{-1}(H')$ e Φ^{-1} é uma transformação linear invertível, segue do Lema 3.3 que K também é um polígono simples.

Lema 5.5. *No caso $c > 0$, o conjunto H' é um hexágono convexo centralmente simétrico. Seus vértices, listados no plano (p, q) em ordem cíclica no sentido anti-horário, são*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \left(\frac{2c - a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad \left(-\frac{a}{2}, \frac{b - 2c}{2} \right), \\ & \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right), \quad \left(\frac{a - 2c}{2}, -\frac{b}{2} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{2c - b}{2} \right). \end{aligned}$$

Além disso, $K = \Phi^{-1}(H')$ é um polígono simples, cujos vértices são as imagens, por Φ^{-1} , dos vértices de H' .

Demonstração. Temos

$$H' = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq \frac{a}{2}, \quad |q| \leq \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad |q - p| \leq \frac{d}{2} \right\},$$

de modo que H' é a interseção de seis semiplanos fechados. Em particular, H' é convexo, limitado e não vazio, pois $(0, 0) \in H'$. Além disso, sua fronteira está contida na união das retas

$$p = \pm \frac{a}{2}, \quad q = \pm \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad q - p = \pm \frac{d}{2}.$$

Logo, H' é um polígono convexo com, no máximo, seis lados, e seus vértices só podem ocorrer nas interseções de pares de retas suporte adjacentes.

Como $d = a + b - 2c$, as interseções dos pares de retas

$$p = \frac{a}{2} \text{ e } q = \frac{b}{2}, \quad q = \frac{b}{2} \text{ e } q - p = \frac{d}{2}, \quad p = -\frac{a}{2} \text{ e } q - p = \frac{d}{2}$$

são, respectivamente, os pontos

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{a}{2}, \frac{b-2c}{2}\right).$$

Pela simetria das desigualdades definidoras de H' em relação à transformação $(p, q) \mapsto (-p, -q)$, obtemos também os pontos opostos

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad \left(\frac{a-2c}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{2c-b}{2}\right).$$

Verifiquemos que os três primeiros pertencem a H' . Para $(a/2, b/2)$, as desigualdades $|p| \leq a/2$ e $|q| \leq b/2$ são imediatas, e

$$\left|\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right| = \frac{b-a}{2} \leq \frac{d}{2},$$

pois

$$d - (b - a) = a + b - 2c - (b - a) = 2(a - c) \geq 0.$$

Para $((2c-a)/2, b/2)$, temos $q = b/2$, $q - p = d/2$ e

$$-\frac{a}{2} \leq \frac{2c-a}{2} \leq \frac{a}{2},$$

pois $0 < 2c \leq a$. Para $(-a/2, (b-2c)/2)$, temos $p = -a/2$, $q - p = d/2$ e

$$-\frac{b}{2} \leq \frac{b-2c}{2} \leq \frac{b}{2},$$

pois $0 < 2c \leq b$. Portanto, esses três pontos pertencem a H' , e, pela simetria já observada, o mesmo vale para seus opostos.

Cada um desses seis pontos é a interseção de duas retas suporte não paralelas de H' ; logo, cada um deles é um vértice de H' . Além disso, esses seis pontos são dois a dois distintos. De fato, os três primeiros têm primeiras coordenadas

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{2c-a}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{a}{2},$$

que são distintas, pois $a > 0$, $c > 0$ e $2c \leq a$. Por outro lado, suas segundas coordenadas são, respectivamente,

$$\frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad \frac{b-2c}{2},$$

todas não negativas, sendo as duas primeiras estritamente positivas. Os três pontos opostos têm segundas coordenadas não positivas. Assim, um dos três primeiros só poderia coincidir com um dos três pontos opostos se tivesse segunda coordenada nula. Isso só pode ocorrer para o terceiro ponto, quando $b = 2c$; mesmo nesse caso, ele é distinto de seu oposto, pois suas primeiras coordenadas são $-a/2$ e $a/2$, com $a > 0$. Portanto, os seis pontos são dois a dois distintos.

Consequentemente, H' possui pelo menos seis vértices. Como já vimos que ele possui, no máximo, seis lados, concluímos que H' possui exatamente seis vértices e exatamente seis lados. Assim, H' é um hexágono convexo.

A ordem indicada no enunciado corresponde, no plano (p, q) , ao percurso da fronteira no sentido anti-horário, passando sucessivamente pelas retas suporte

$$q = \frac{b}{2}, \quad q - p = \frac{d}{2}, \quad p = -\frac{a}{2}, \quad q = -\frac{b}{2}, \quad q - p = -\frac{d}{2}, \quad \text{e} \quad p = \frac{a}{2}.$$

A simetria central decorre novamente da invariância das desigualdades definidoras por $(p, q) \mapsto (-p, -q)$.

Por fim, como H' é um polígono simples e Φ^{-1} é uma transformação linear invertível, segue do Lema 3.3 que $K = \Phi^{-1}(H')$ também é um polígono simples. Além disso, pelo Lema 3.1, Φ^{-1} leva lados de H' em lados de K ; logo, os vértices de K são precisamente as imagens, por Φ^{-1} , dos vértices de H' . $\square$

Teorema 5.6. *No caso $c > 0$, valem as seguintes afirmações:*

(i) *a região de Voronoi é o hexágono*

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{a}{2}, \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}| \leq \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad |\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})| \leq \frac{d}{2} \right\};$$

(ii) *os únicos vetores relevantes de Voronoi são $\pm \mathbf{u}$, $\pm \mathbf{v}$ e $\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})$;*

(iii) *os vértices de $\mathcal{V}$ são as imagens, por Φ^{-1} , dos vértices de H' descritos no Lema 5.5.*

Demonstração. Como as desigualdades que definem K correspondem aos vetores $\pm \mathbf{u}$, $\pm \mathbf{v}$ e $\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, a caracterização (5.1) implica imediatamente que $\mathcal{V} \subset K$. Resta provar a inclusão oposta.

Fixemos $\mathbf{w} = m\mathbf{u} + n\mathbf{v} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{x} \in K$. Escrevendo

$$p = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \quad \text{e} \quad q = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v},$$

temos $(p, q) \in H'$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = mp + nq$ e

$$p \leq \frac{a}{2}, \quad -p \leq \frac{a}{2}, \quad q \leq \frac{b}{2}, \quad -q \leq \frac{b}{2}, \quad p - q \leq \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad q - p \leq \frac{d}{2}.$$

Basta mostrar que

$$mp + nq \leq \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{2} = \frac{m^2a + 2mnc + n^2b}{2}.$$

Se $m, n \geq 0$, então

$$mp + nq \leq \frac{ma}{2} + \frac{nb}{2} \leq \frac{m^2a + n^2b}{2} \leq \frac{m^2a + 2mnc + n^2b}{2}.$$

Suponha $m \geq 0$ e $n = -k < 0$, com $k \geq 1$. Se $m \geq k$, então

$$mp - kq = (m - k)p + k(p - q) \leq \frac{(m - k)a}{2} + \frac{kd}{2}.$$

Além disso,

$$\|\mathbf{w}\|^2 - ((m - k)a + kd) = (m - 1)(am - 2ck) + bk(k - 1) \geq 0,$$

pois

$$am - 2ck = a(m - k) + k(a - 2c) \geq 0.$$

Logo, $mp - kq \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$.

Se $k \geq m$, então

$$mp - kq = m(p - q) + (k - m)(-q) \leq \frac{md}{2} + \frac{(k - m)b}{2},$$

e

$$\|\mathbf{w}\|^2 - (md + (k - m)b) = am(m - 1) + (k - 1)(bk - 2cm) \geq 0,$$

pois

$$bk - 2cm \geq bm - 2cm = m(b - 2c) \geq 0.$$

Portanto, também nesse caso $mp - kq \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$.

Suponha agora $m = -h < 0$ e $n \geq 0$, com $h \geq 1$. Se $n \geq h$, então

$$-hp + nq = h(q - p) + (n - h)q \leq \frac{hd}{2} + \frac{(n - h)b}{2},$$

e

$$\|\mathbf{w}\|^2 - (hd + (n - h)b) = ah(h - 1) + (n - 1)(bn - 2ch) \geq 0,$$

pois

$$bn - 2ch \geq bh - 2ch = h(b - 2c) \geq 0.$$

Logo, $-hp + nq \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$.

Se $h \geq n$, então

$$-hp + nq = (h - n)(-p) + n(q - p) \leq \frac{(h - n)a}{2} + \frac{nd}{2},$$

e

$$\|\mathbf{w}\|^2 - ((h - n)a + nd) = (h - 1)(ah - 2cn) + bn(n - 1) \geq 0,$$

pois

$$ah - 2cn \geq an - 2cn = n(a - 2c) \geq 0.$$

Portanto, novamente $-hp + nq \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$.

Por fim, se $m = -h \leq 0$ e $n = -k \leq 0$, com $h, k \geq 0$, então

$$-hp - kq \leq \frac{ha}{2} + \frac{kb}{2} \leq \frac{h^2a + k^2b + 2hkc}{2} = \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{2}.$$

Em todos os casos, obtemos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \leq \|\mathbf{w}\|^2/2$. Como $\mathbf{w}$ é arbitrário em $\Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, a caracterização (5.1) implica que $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Assim, $K \subset \mathcal{V}$, e, portanto, $\mathcal{V} = K$. Isso prova o item (i).

Pelo Lema 5.5, K é um hexágono. Além disso, pela própria definição de K , as retas $H(\pm \mathbf{u})$, $H(\pm \mathbf{v})$ e $H(\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u}))$ contêm os seis lados de K . Como essas seis retas são distintas e $K = \mathcal{V}$ possui exatamente seis lados, cada uma delas suporta precisamente um lado de $\mathcal{V}$. Assim, $\pm \mathbf{u}$, $\pm \mathbf{v}$ e $\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ são vetores relevantes de Voronoi. Resta verificar que não há outros. Para isso, observemos que, se $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $H(\mathbf{w}) = H(\mathbf{z})$, então $\mathbf{w} = t\mathbf{z}$ para algum $t \neq 0$, pois as duas retas têm vetores normais paralelos. Nesse caso, a igualdade das retas

$$\left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \frac{\|\mathbf{z}\|^2}{2} \right\} = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \frac{t\|\mathbf{z}\|^2}{2} \right\}$$

implica $t = 1$, e, portanto, $\mathbf{w} = \mathbf{z}$. Consequentemente, cada lado de $\mathcal{V}$ corresponde a um único vetor relevante. Logo, os únicos vetores relevantes de Voronoi são $\pm \mathbf{u}$, $\pm \mathbf{v}$ e $\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})$. Isso prova o item (ii).

O item (iii) decorre imediatamente do Lema 5.5. □

Exemplo 5.7. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado bidimensional gerado por $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$, ilustrado na Figura 3. Esse reticulado é conhecido como *reticulado hexagonal*. Como

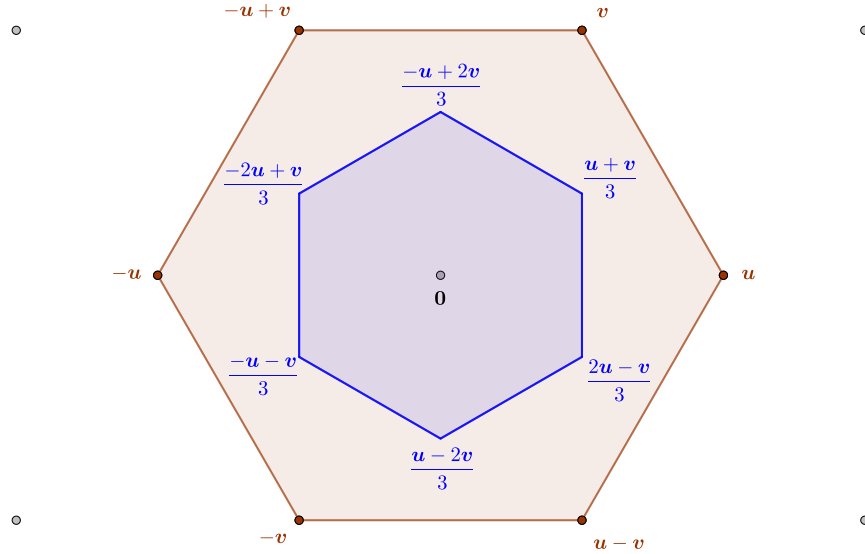
$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = 1,$$

a região de Voronoi de Λ , conforme se pode verificar diretamente e será formalizado no lema seguinte, é o hexágono regular destacado na Figura 3, cujos vértices são

$$\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad \frac{-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}}{3}, \quad \frac{-2\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad -\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad \frac{\mathbf{u} - 2\mathbf{v}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2\mathbf{u} - \mathbf{v}}{3}.$$

Esse exemplo ilustra, em um caso concreto, a descrição dos vértices que será estabelecida no lema seguinte e antecipa também a ideia central da Proposição 5.10: por meio de um operador linear apropriado, a região de Voronoi pode ser transformada no hexágono de vértices $\pm\mathbf{u}$, $\pm\mathbf{v}$ e $\pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, destacado em marrom na Figura 3.

Figura 3: Reticulado Λ gerado por $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$, e sua região de Voronoi.



Fonte: Autores (2026).

Lema 5.8. No caso $c > 0$ e $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, valem $a = b$ e $c = a/2$. Além disso, os vértices da região de Voronoi, em ordem cíclica, são

$$\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad \frac{-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}}{3}, \quad \frac{-2\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad -\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad \frac{\mathbf{u} - 2\mathbf{v}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2\mathbf{u} - \mathbf{v}}{3}.$$

Demonstração. Da hipótese $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, segue imediatamente que $a = b$. Além disso,

$$a = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = a + b - 2c = 2a - 2c,$$

de onde se obtém $c = a/2$. Pelo Teorema 5.6 e pelo Lema 5.5, os vértices da região de Voronoi são os pontos

$$\Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad \Phi^{-1}\left(0, \frac{a}{2}\right), \quad \Phi^{-1}\left(-\frac{a}{2}, 0\right),$$

e seus opostos. Se $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, então, como $c = a/2$,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left(a\alpha + \frac{a}{2}\beta, \frac{a}{2}\alpha + a\beta\right).$$

Resolvendo os sistemas lineares correspondentes, obtemos

$$\Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}, \quad \Phi^{-1}\left(0, \frac{a}{2}\right) = \frac{-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}}{3}$$

e

$$\Phi^{-1}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{-2\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}.$$

Os três vértices restantes são os opostos desses pontos, pois a região de Voronoi é centralmente simétrica. Finalmente, como $\det(\Phi) > 0$, a transformação Φ^{-1} preserva a orientação. Portanto, a ordem cíclica dos vértices é a indicada no enunciado. $\square$

Lema 5.9. *No caso $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, vale, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$,*

$$\|m\mathbf{u} + n\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2(m^2 + mn + n^2).$$

Além disso, o menor valor positivo de $\|m\mathbf{u} + n\mathbf{v}\|^2$ é $\|\mathbf{u}\|^2$, e ele é atingido exatamente para

$$(m, n) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, -1), (-1, 1)\}.$$

Demonstração. Da hipótese $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, segue que $a = b$ e $c = a/2$, onde $a = \|\mathbf{u}\|^2$. Assim, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\|m\mathbf{u} + n\mathbf{v}\|^2 = m^2a + 2mnc + n^2b = a(m^2 + mn + n^2),$$

o que prova a primeira afirmação.

Como $a > 0$, basta determinar o menor valor positivo de $m^2 + mn + n^2$. Se $mn \geq 0$, então

$$m^2 + mn + n^2 \geq m^2 + n^2 \geq 1$$

para todo $(m, n) \neq (0, 0)$, com igualdade exatamente quando $(m, n) = (\pm 1, 0)$ ou $(m, n) = (0, \pm 1)$.

Se $mn < 0$, pela simetria da expressão em m e n , podemos supor $m > 0$ e $n = -k$, com $k > 0$. Nesse caso,

$$m^2 + mn + n^2 = m^2 - mk + k^2 = (m - k)^2 + mk \geq 1.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(m - k)^2 = 0$ e $mk = 1$, isto é, $m = k = 1$. Isso fornece $(m, n) = (1, -1)$ e, pela mesma simetria, $(m, n) = (-1, 1)$.

Logo, o menor valor positivo de $m^2 + mn + n^2$ é 1, atingido exatamente para

$$(m, n) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, -1), (-1, 1)\}.$$

Consequentemente, o menor valor positivo de $\|m\mathbf{u} + n\mathbf{v}\|^2$ é $\|\mathbf{u}\|^2$. □

Proposição 5.10 (Recuperação da identidade no caso hexagonal regular). *No caso $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, existe um operador linear bijetor $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$S(\mathcal{V}) = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}.$$

Em particular,

$$\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda).$$

Demonstração. Da hipótese, segue que $a = b$ e $c = a/2$. Definimos $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \text{e} \quad S(\mathbf{v}) = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v}.$$

Como $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, essa prescrição determina um único operador linear. Sua matriz nessa base é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

de modo que $\det(S) = 3 \neq 0$, portanto, S é bijetor. Aplicando S aos vértices da região de Voronoi descritos no Lema 5.8, obtemos

$$S\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}\right) = \mathbf{v}, \quad S\left(\frac{-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}}{3}\right) = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad \text{e} \quad S\left(\frac{-2\mathbf{u} + \mathbf{v}}{3}\right) = -\mathbf{u}.$$

Como $\mathcal{V}$ é centralmente simétrica e S é linear, os vértices opostos são enviados para $-\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. Portanto,

$$S(\mathcal{V}) = P := \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}.$$

Pelo Lema 5.9, os seis vértices de P são exatamente os vetores não nulos de menor norma em Λ . Como a norma euclidiana é estritamente convexa, todo ponto de P distinto dos seus vértices tem norma estritamente menor que a norma comum desses seis vetores. Portanto, nenhum outro ponto não nulo de Λ pode pertencer a P . Logo,

$$P \cap \Lambda = \{\mathbf{0}, \pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}.$$

Além disso, P contém o paralelogramo $\text{conv}\{\pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}\}$, cujo interior contém a origem. Assim, $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$. Portanto,

$$B_{\Lambda}(P) = 6 \quad \text{e} \quad I_{\Lambda}(P) = 1.$$

Aplicando o Teorema 4.3, obtemos

$$\text{Area}(P) = \det(\Lambda) \left(1 + \frac{6}{2} - 1\right) = 3 \det(\Lambda).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.5,

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(S(\mathcal{V})) = |\det(S)| \text{Area}(\mathcal{V}) = 3 \text{Area}(\mathcal{V}).$$

Comparando as duas igualdades, concluímos que $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$. □

No contexto do Exemplo 5.7, o operador linear S definido na demonstração da Proposição 5.10 transforma a região de Voronoi de Λ , isto é, o hexágono azul da Figura 3, no polígono

$$\text{conv}\{\pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\},$$

que corresponde, na figura, ao hexágono marrom. De fato, para $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$, temos

$$S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad S(\mathbf{v}) = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (0, \sqrt{3}).$$

Assim,

$$\|S(\mathbf{u})\| = \|S(\mathbf{v})\| = \sqrt{3},$$

e os ângulos que $S(\mathbf{u})$ e $S(\mathbf{v})$ formam com o eixo x são, respectivamente, $\pi/6$ e $\pi/2$. Portanto, nesse exemplo, S é a composição de uma rotação de $\pi/6$ no sentido anti-horário com uma dilatação de fator $\sqrt{3}$.

Exemplo 5.11 (Um caso hexagonal não regular). Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado bidimensional gerado por

$$\mathbf{u} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

Então

$$a = \|\mathbf{u}\|^2 = 1, \quad b = \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{10}{9}, \quad c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad d = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \frac{13}{9}.$$

Em particular, $0 < 2c = 2/3 < 1 = a < b = 10/9$, de modo que a região de Voronoi $\mathcal{V}$ é hexagonal, pelo Teorema 5.6. Como $\|\mathbf{u}\|^2 = 1$, $\|\mathbf{v}\|^2 = 10/9$ e $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = 13/9$, essas três normas não são todas iguais; portanto, trata-se de um caso hexagonal não regular.

Neste exemplo, $\Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_1/3 + x_2)$. Pelo Lema 5.5, três vértices consecutivos de $\mathcal{V}$, listados no sentido anti-horário, são

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{18}\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{11}{18}\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{18}\right),$$

e os demais são seus opostos. Além disso, $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$, de modo que $\det(\Lambda) = 1$. Como os vértices de $\mathcal{V}$, em ordem cíclica, são $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, -\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, -\mathbf{x}_3$, podemos decompor $\mathcal{V}$ em seis triângulos com um vértice comum na origem. Pela simetria central, cada um dos três determinantes abaixo ocorre duas vezes na soma das áreas desses triângulos, compensando o fator $1/2$. Assim,

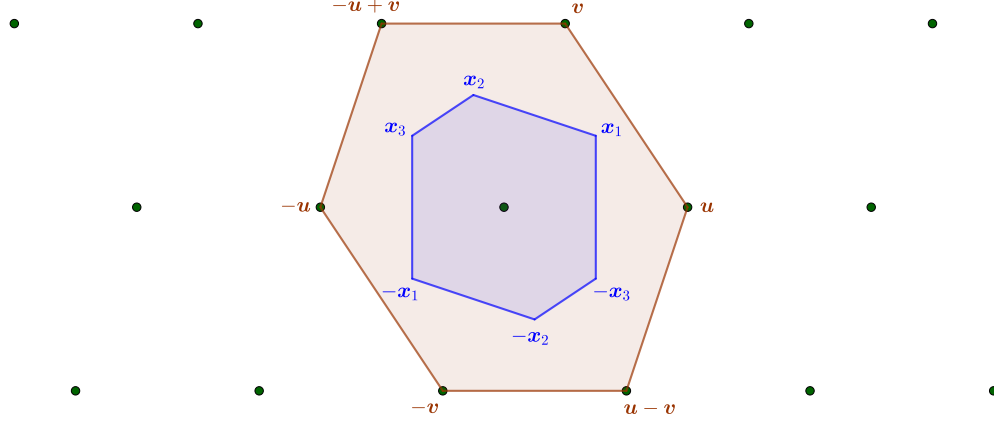
$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{V}) &= \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \det(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \det(\mathbf{x}_3, -\mathbf{x}_1) \\ &= \frac{10}{27} + \frac{13}{54} + \frac{7}{18} = 1 = \det(\Lambda). \end{aligned}$$

A Figura 4 ilustra a região de Voronoi, destacada em azul, juntamente com o polígono $P = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}$, destacado em marrom. No polígono P , três vértices consecutivos podem ser tomados como $\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ e $\mathbf{y}_3 = -\mathbf{u}$. Nesse caso, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3$. Por outro lado, para os vértices consecutivos de $\mathcal{V}$ considerados acima, temos

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 = \left(0, \frac{7}{9}\right) \neq \left(-\frac{1}{6}, \frac{11}{18}\right) = \mathbf{x}_2.$$

Consequentemente, não existe um operador linear que envie simultaneamente $\mathbf{x}_i$ em $\mathbf{y}_i$, para $i = 1, 2, 3$. Essa incompatibilidade antecipa a obstrução à existência de um operador linear que leve $\mathcal{V}$ em P . O próximo teorema analisa todas as possíveis correspondências entre os vértices e mostra que tal operador existe exatamente no caso hexagonal regular. Portanto, embora o procedimento linear empregado no caso hexagonal regular não se aplique a este exemplo, permanece válida a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$.

Figura 4: Reticulado Λ gerado por $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1/3, 1)$, sua região de Voronoi $\mathcal{V}$, em azul, e o polígono $P = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}$, em marrom.



Fonte: Autores (2026).

O Exemplo 5.11 antecipa, em um caso concreto, a obstrução à extensão do procedimento linear empregado no caso hexagonal regular. O resultado seguinte caracteriza precisamente quando tal procedimento é possível.

Teorema 5.12 (Critério linear para o caso hexagonal). *Suponha $c > 0$. Existe um operador linear bijetor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(\mathcal{V}) = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}$$

se, e somente se,

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$

Demonstração. A suficiência foi estabelecida na Proposição 5.10. Resta provar a necessidade. Suponha, portanto, que exista um operador linear bijetor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathcal{V}) = P$, em que

$$P = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}.$$

Pelo Teorema 5.6, $\mathcal{V}$ é um hexágono convexo centralmente simétrico. Pelo Lema 5.5, três vértices consecutivos de $\mathcal{V}$ podem ser escritos como

$$\mathbf{x}_1 = \Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \mathbf{x}_2 = \Phi^{-1}\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

e

$$\mathbf{x}_3 = \Phi^{-1}\left(-\frac{a}{2}, \frac{b-2c}{2}\right),$$

sendo os demais vértices os opostos desses pontos.

Observemos agora uma propriedade elementar de P . Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear determinado por

$$L(1, 0) = \mathbf{u} \quad \text{e} \quad L(0, 1) = \mathbf{v}.$$

Como $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, o operador L é bijetor e leva o hexágono

$$\text{conv}\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$$

em P . Consequentemente, os vértices de P , em uma ordem cíclica, podem ser tomados como

$$\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad -\mathbf{u}, \quad -\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Assim, se $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ são três vértices consecutivos de P , com $\mathbf{y}_2$ como vértice intermediário da tripla, então

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3.$$

De fato, isso decorre diretamente das identidades

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}), & \mathbf{v} - \mathbf{u} &= \mathbf{v} + (-\mathbf{u}), \\ -\mathbf{u} &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + (-\mathbf{v}), & -\mathbf{v} &= (-\mathbf{u}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (-\mathbf{v}) + \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Como T é uma transformação linear invertível e $T(\mathcal{V}) = P$, ela leva pontos extremos de $\mathcal{V}$ em pontos extremos de P e lados de $\mathcal{V}$ em lados de P . Consequentemente, vértices consecutivos de $\mathcal{V}$ são enviados em vértices consecutivos de P , preservando a ordem cíclica ou invertendo-a, conforme o sinal de $\det(T)$. Defina

$$\mathbf{y}_i = T(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Então $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ são três vértices consecutivos de P , com $\mathbf{y}_2$ como vértice intermediário. Logo,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3.$$

Portanto,

$$T(\mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_3) = T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3).$$

Como T é injetiva, segue que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$. Aplicando Φ a essa igualdade, obtemos

$$\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}, \frac{b-2c}{2}\right) = (0, b-c).$$

Comparando as coordenadas, concluímos que

$$a = 2c \quad \text{e} \quad b = 2c.$$

Logo, $a = b = 2c$. Por fim, $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = a + b - 2c = a$. Como $a = b$, segue que $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2$. Portanto, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$. $\square$

Retomando o Exemplo 5.11, como as normas $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ não são todas iguais, o Teorema 5.12 mostra que não existe operador linear bijetor $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(\mathcal{V}) = \text{conv}\{\pm\mathbf{u}, \pm\mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}.$$

Portanto, embora a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$ permaneça válida, ela não pode ser recuperada, nesse exemplo, pelo procedimento linear específico considerado acima.

Em síntese, as Proposições 5.4 e 5.10 mostram que, nos casos ortogonal e hexagonal regular, a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$ pode ser recuperada por meio do Teorema de Pick, após a construção de transformações lineares apropriadas. Por outro lado, o Teorema 5.12 mostra que, no caso hexagonal, esse procedimento é possível exatamente quando $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$. Assim, embora a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$ permaneça válida no caso hexagonal não regular, ela não pode ser recuperada pelo procedimento linear específico considerado nesta seção.

6 Considerações finais

Neste artigo, deduzimos o Teorema de Pick para reticulados bidimensionais arbitrários a partir de sua formulação clássica em $\mathbb{Z}^2$. O argumento adotado baseia-se no transporte de polígonos simples por transformações lineares invertíveis, na preservação das contagens de pontos de reticulado no interior e na fronteira desses polígonos, e na fórmula de escala para a área. Desse modo, obtemos a versão apresentada no Teorema 4.3.

Também discutimos a relação entre esse resultado e a área de regiões de Voronoi em dimensão 2. O objetivo não foi substituir os métodos usuais de cálculo dessa área, mas analisar em que medida um procedimento linear baseado no Teorema de Pick permite recuperar a identidade $\text{Area}(\mathcal{V}) = \det(\Lambda)$. Nos casos em que a região de Voronoi é um retângulo ou um hexágono regular, essa recuperação foi obtida por meio de transformações lineares apropriadas.

A análise do caso hexagonal geral mostra, contudo, que esse procedimento tem alcance limitado. O Teorema 5.12 caracteriza precisamente quando existe um operador linear bijetor que transforma $\mathcal{V}$ no polígono $\text{conv}\{\pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \pm(\mathbf{v} - \mathbf{u})\}$: isso ocorre se, e somente se, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$, isto é, no caso hexagonal regular.

Assim, o trabalho evidencia uma diferença conceitual entre os dois contextos considerados. O Teorema de Pick é transportado naturalmente por transformações lineares invertíveis entre reticulados bidimensionais, enquanto as regiões de Voronoi dependem da estrutura métrica euclidiana. Essa distinção explica por que o método linear é suficiente para deduzir o Teorema de Pick em reticulados bidimensionais arbitrários, mas só permite recuperar a área de regiões de Voronoi em situações geométricas especiais.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido no âmbito do Projeto Universal CNPq nº 405842/2023-6. Os autores agradecem, ainda, aos revisores pelas valiosas sugestões e contribuições para o aprimoramento deste artigo.

Referências

- [1] Conway, John H.; Sloane, Neil J. A.: *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 290. 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] Hefez, Abramo; Fernandez, Cecília S.: *Introdução à Álgebra Linear*. 3. ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2022.
- [3] Hermes, Joelson Dayvison Veloso: O Teorema de Pick. *Ciência e Natura* **37** (2015), edição especial PROFMAT, 203–213.
- [4] Lima, Elon Lages: *Espaços Métricos*. 6. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2020.
- [5] Meisters, G. H.: Polygons Have Ears. *The American Mathematical Monthly* **82** (1975), no. 6, 648–651.
- [6] Murty, M. Ram; Thain, Nithum: Pick’s Theorem via Minkowski’s Theorem. *The American Mathematical Monthly* **114** (2007), no. 8, 732–736.

- [7] O'Rourke, Joseph: *Art Gallery Theorems and Algorithms*. International Series of Monographs on Computer Science. Oxford University Press, New York, 1987.
- [8] Pereira, Antônio Luiz; Melo, Severino Toscano do Rego: Contando áreas: o Teorema de Pick. *Revista do Professor de Matemática* **78** (2012), 36–42.
- [9] Pick, Georg: Geometrisches zur Zahlenlehre. *Lotos – Zeitschrift für Naturwissenschaften* **47** (1899), 311–319.
- [10] Strey, Eleonesio; Machado, Suzana Carletti; Strey, Giselle Ribeiro de Azeredo Silva: O Teorema de Pick em reticulados bidimensionais. *Ciência e Natura* **47** (2025), e87983.
- [11] Varberg, Dale E.: Pick's Theorem Revisited. *The American Mathematical Monthly* **92** (1985), no. 8, 584–587.

Recebido em 16 de abril de 2026

Revisado em 20 de julho de 2026

Aceito em 29 de julho de 2026