REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v11i1.25463

UMA CARACTERIZAÇÃO DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM POR PERÍODOS DE 2-SEQUÊNCIAS

A CHARACTERIZATION OF THE LEAST COMMON MULTIPLE THROUGH PERIODS OF 2-SEQUENCES

Antônio Francisco Onofre Batista
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, Tocantins, Brasil
edwinonofre@live.com

José Carlos de Oliveira Junior
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, Tocantins, Brasil
jose.junior@ufnt.edu.br

Alisson Sousa Santos da Silva
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, Tocantins, Brasil
alisson.silva@ufnt.edu.br

Comunicado por M. Alegri

Resumo

Neste trabalho, caracterizamos o mínimo múltiplo comum por meio do período mínimo de uma 2-sequência. Para um inteiro $m \geq 4$, consideramos a sequência triangular periódica

$$1, 2, \ldots, m-1, m, m-1, \ldots, 3, 2, 1, 2, \ldots$$

de período $P = 2(m-1)$ e a subsequência obtida pela amostragem dos termos de p em p. Provamos o critério exato segundo o qual um inteiro positivo q é período da subsequência se e somente se $P \mid pq$. Se ρ denota o seu período mínimo, segue diretamente da caracterização por divisibilidade que $p\rho = \text{mmc}(p, P)$. Em seguida, construímos, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, uma 2-sequência de período mínimo $\rho_2(x, y)$ tal que $\text{mmc}(x, y) = x\rho_2(x, y)$. Essa representação permite deduzir, na linguagem das 2-sequências, propriedades do MMC como simetria, idempotência, homogeneidade, monotonicidade, associatividade e a descrição por valorações primas.

Palavras-chave: 2-sequências; mínimo múltiplo comum; sequências periódicas; divisibilidade.

Abstract

We characterize the least common multiple by means of the least period of a 2-sequence. For an integer $m \geq 4$, we consider the periodic triangular sequence

$$1, 2, \ldots, m-1, m, m-1, \ldots, 3, 2, 1, 2, \ldots$$

This open access article is licensed under
a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0.

with period $P = 2(m-1)$ and the subsequence obtained by sampling every p-th term. We prove the exact criterion that a positive integer q is a period of the sampled sequence if and only if $P \mid pq$. If ρ denotes its least period, the divisibility characterization of the least common multiple yields $p\rho = \operatorname{lcm}(p, P)$. Next, for arbitrary $x, y \in \mathbb{N}$, we construct a 2-sequence with least period $\rho_2(x, y)$ such that $\operatorname{lcm}(x, y) = x\rho_2(x, y)$. This representation allows the standard properties of the least common multiple—symmetry, idempotence, homogeneity, monotonicity, associativity, and the prime-valuation description—to be reformulated in terms of these periods.

Keywords: 2-sequences; least common multiple; periodic sequences; divisibility.

1 Introdução

Listas periódicas simples podem codificar informações aritméticas de maneira pouco evidente. Neste trabalho, estudamos uma família obtida de uma lista triangular simétrica: os valores crescem de 1 até uma altura m, decrescem novamente até 1 e o movimento se repete indefinidamente. Ao amostrar essa lista com um salto fixo p, obtemos o que chamaremos de *2-sequência* associada aos parâmetros m e p. O interesse da construção não está em reobter uma fórmula já conhecida, mas em ler uma operação clássica da Teoria dos Números através da periodicidade: como veremos, o período mínimo da 2-sequência coincide com a ordem aditiva de uma classe em um grupo cíclico, o que confere significado estrutural ao MMC e sugere extensões naturais a outros quocientes finitos.

Uma formulação inicial das 2-sequências e de sua periodicidade aparece na monografia de Silva [6]. A construção foi posteriormente desenvolvida por Batista [1][1], com ênfase em relações com o mínimo múltiplo comum (MMC) e o máximo divisor comum (MDC). O presente artigo oferece uma exposição autocontida da parte aritmética, estabelece um critério modular exato para todos os períodos e demonstra a caracterização do MMC diretamente por sua propriedade universal de divisibilidade.

Nosso problema central é determinar o período mínimo dessa sequência e compreender seu significado aritmético. Se $P = 2(m-1)$ é o período da lista triangular e ρ é o período mínimo da 2-sequência, perguntamos se o produto $p\rho$ pode ser caracterizado, sem cálculo prévio, apenas por propriedades de divisibilidade. A resposta conduzirá diretamente ao mínimo múltiplo comum de p e P.

A resposta é afirmativa. Mais precisamente, provamos que, para $m \geq 4$, os períodos positivos da 2-sequência são exatamente os inteiros q que satisfazem

$$P \mid pq. \tag{1.1}$$

Esse critério resolve simultaneamente a periodicidade e a minimalidade. Ele também evita uma dificuldade causada pela simetria da sequência: termos iguais podem ocupar

[1]Na referência [1], essas sequências são denominadas *sequências 2E*; aqui adotamos o termo *2-sequência*.

posições refletidas dentro de um mesmo ciclo, de modo que a igualdade entre valores não implica, por si só, congruência entre os respectivos índices.

As contribuições principais do trabalho são:

1. uma descrição modular exata das coincidências entre termos da sequência triangular;
2. um critério necessário e suficiente para todos os períodos da 2-sequência;
3. a caracterização de $p\rho$ como MMC pela propriedade universal de divisibilidade;
4. uma construção que recupera $\mathrm{mmc}(x, y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, a partir do período mínimo de uma 2-sequência;
5. uma reformulação das propriedades fundamentais do MMC em termos desses períodos.

O texto concentra-se exclusivamente nos aspectos aritméticos e periódicos da construção. A Seção 2 fixa as definições; a Seção 3 estabelece o critério de periodicidade; a Seção 4 deduz a caracterização do MMC; a Seção 5 desenvolve suas propriedades por 2-sequências; e a Seção 6 apresenta exemplos e discute a nitidez das hipóteses.

2 Preliminares

Adotamos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Para inteiros positivos u e v, escrevemos $u \mid v$ quando existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $v = uk$. Usaremos as caracterizações do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum pela divisibilidade, usuais em Teoria dos Números; veja, por exemplo, [3, 2, 4, 5].

Definição 2.1. Sejam $u, v \in \mathbb{N}$. Um inteiro positivo D é o *máximo divisor comum* de u e v quando:

1. $D \mid u$ e $D \mid v$;
2. para todo $C \in \mathbb{N}$, se $C \mid u$ e $C \mid v$, então $C \mid D$.

Nesse caso, escrevemos $D = \mathrm{mdc}(u, v)$.

O algoritmo de Euclides garante a existência do inteiro da Definição 2.1. Sua unicidade segue da antissimetria da divisibilidade em $\mathbb{N}$: se D e D' satisfazem a definição, então $D \mid D'$ e $D' \mid D$, logo $D = D'$.

Definição 2.2. Sejam $u, v \in \mathbb{N}$. Um inteiro positivo M é o *mínimo múltiplo comum* de u e v quando:

1. $u \mid M$ e $v \mid M$;

2. para todo $C \in \mathbb{N}$, se $u \mid C$ e $v \mid C$, então $M \mid C$.

Nesse caso, escrevemos $M = \mathrm{mmc}(u, v)$.

Definição 2.3. Seja $(c_n)_{n\geq 1}$ uma sequência. Um inteiro $q \in \mathbb{N}$ é um *período* de (c_n) quando

$$c_{n+q} = c_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se o conjunto dos períodos é não vazio, seu menor elemento é chamado *período mínimo* ou *período fundamental* da sequência.

Fixe $m \geq 2$ e ponha

$$P = 2(m-1). \tag{2.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $r_n \in \{0, 1, \ldots, P-1\}$ o resto determinado por

$$n - 1 \equiv r_n \pmod{P}. \tag{2.2}$$

Definição 2.4 (Sequência triangular e 2-sequência)**.** A sequência triangular de altura m é $(a_n^{(m)})_{n\geq 1}$ definida por

$$a_n^{(m)} = 1 + \min\{r_n, P - r_n\}. \tag{2.3}$$

Explicitamente,

$$(a_n^{(m)}) = (1, 2, 3, \ldots, m-1, m, m-1, \ldots, 3, 2, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Para $p \in \mathbb{N}$, a 2-sequência associada aos parâmetros m e p é a subsequência $(b_n^{m,p})_{n\geq 1}$ dada por

$$b_n^{m,p} = a_{np}^{(m)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

A expressão (2.3) formaliza a lista (2.4) e torna sua simetria modular explícita.

Proposição 2.5. *O período mínimo de* $(a_n^{(m)})$ *é* $P = 2(m-1)$.

Demonstração. Pelas equações (2.2) e (2.3), temos $a_{n+P}^{(m)} = a_n^{(m)}$ para todo n, logo P é um período. Por outro lado, $a_n^{(m)} = 1$ ocorre exatamente quando $n \equiv 1 \pmod{P}$. Se q é qualquer período, então $a_{1+q}^{(m)} = a_1^{(m)} = 1$, donde $1 + q \equiv 1 \pmod{P}$ e $P \mid q$. Portanto, nenhum inteiro positivo menor que P pode ser período. □

O lema seguinte registra precisamente as duas maneiras pelas quais a simetria de (2.4) produz termos iguais.

Lema 2.6 (Lema da reflexão)**.** *Para quaisquer* $u, v \in \mathbb{N}$,

$$a_u^{(m)} = a_v^{(m)} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u \equiv v \pmod{P}\Big) \text{ ou } \Big(u + v \equiv 2 \pmod{P}\Big). \tag{2.6}$$

Demonstração. Sejam r_u e r_v os restos definidos em (2.2). Pela forma da função $r \mapsto \min\{r, P - r\}$ em $\{0, \ldots, P-1\}$, temos

$$\min\{r_u, P - r_u\} = \min\{r_v, P - r_v\}$$

se e somente se $r_u = r_v$ ou $r_u = P - r_v$. A primeira igualdade equivale a $u \equiv v \pmod{P}$; a segunda equivale a $(u-1) + (v-1) \equiv 0 \pmod{P}$, isto é, $u + v \equiv 2 \pmod{P}$. □

3 Os períodos de uma 2-sequência

O resultado a seguir é o núcleo do artigo. Além de identificar o período mínimo, ele descreve todos os períodos da 2-sequência.

Teorema 3.1 (Critério exato de periodicidade)**.** *Sejam $m \geq 4$, $p \in \mathbb{N}$ e $P = 2(m-1)$. Um inteiro $q \in \mathbb{N}$ é período da 2-sequência $(b_n^{m,p})$ se e somente se*

$$P \mid pq. \tag{3.1}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $P \mid pq$. Como P é período de $(a_n^{(m)})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$b_{n+q}^{m,p} = a_{(n+q)p}^{(m)} = a_{np+pq}^{(m)} = a_{np}^{(m)} = b_n^{m,p}.$$

Logo, q é período de $(b_n^{m,p})$.

Reciprocamente, suponha que q seja um período. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{(n+q)p}^{(m)} = a_{np}^{(m)}. \tag{3.2}$$

Pelo Lema 2.6, para cada n vale ao menos uma das congruências

$$(n+q)p \equiv np \pmod{P}, \tag{3.3}$$
$$(n+q)p + np \equiv 2 \pmod{P}. \tag{3.4}$$

A congruência (3.3) equivale a $P \mid pq$ e independe de n. Suponhamos, por absurdo, que $P \nmid pq$. Nesse caso, (3.3) nunca ocorre e (3.4) deve valer para todo n, ou seja,

$$(2n+q)p \equiv 2 \pmod{P} \tag{3.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Subtraindo as congruências obtidas de (3.5) para $n = 2$ e $n = 1$, concluímos que

$$2p \equiv 0 \pmod{P}. \tag{3.6}$$

Como $P = 2(m-1)$, a congruência (3.6) implica $m - 1 \mid p$; portanto,

$$p \equiv 0 \pmod{P} \quad \text{ou} \quad p \equiv \frac{P}{2} \pmod{P}.$$

Por outro lado, tomando $n = 1$ em (3.5) e usando (3.6), obtemos

$$pq \equiv 2 \pmod{P}. \tag{3.7}$$

Se $p \equiv 0 \pmod{P}$, então $pq \equiv 0 \pmod{P}$. Se $p \equiv P/2 \pmod{P}$, então pq é congruente a 0 ou a $P/2$ módulo P. Como $m \geq 4$, temos $P/2 = m - 1 \geq 3$; em nenhum caso (3.7) pode ocorrer. A contradição mostra que $P \mid pq$. □

Corolário 3.2. *Nas hipóteses do Teorema 3.1, o período mínimo ρ de $(b_n^{m,p})$ é*

$$\rho = \min\{q \in \mathbb{N} : P \mid pq\}. \tag{3.8}$$

Em particular,

$$\rho = \frac{P}{\mathrm{mdc}(p, P)}. \tag{3.9}$$

Demonstração. A primeira igualdade é imediata pelo Teorema 3.1. Para a segunda, escreva $p = gp_0$ e $P = gP_0$, onde $g = \mathrm{mdc}(p, P)$ no sentido da Definição 2.1 e $\mathrm{mdc}(p_0, P_0) = 1$. A condição $P \mid pq$ equivale a $P_0 \mid p_0 q$. Pelo lema de Euclides, isso equivale a $P_0 \mid q$. Assim, o menor q positivo possível é $P_0 = P/g$. □

Em linguagem de grupos, o Corolário 3.2 afirma que ρ é a ordem aditiva da classe de p no grupo cíclico $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$; para o contexto clássico de congruências e aritmética modular, veja [4, 5]. O conteúdo não trivial do Teorema 3.1 é mostrar que a projeção simétrica dada por (2.3) não reduz essa ordem quando $m \geq 4$.

4 Caracterização do mínimo múltiplo comum

Definimos ρ apenas como o período mínimo da 2-sequência e demonstraremos que $p\rho$ é o MMC no sentido da Definição 2.2.

Teorema 4.1 (Caracterização do MMC)**.** *Sejam $m \geq 4$, $p \in \mathbb{N}$, $P = 2(m-1)$ e ρ o período mínimo da 2-sequência $(b_n^{m,p})$. Então*

$$\boxed{\mathrm{mmc}(p, P) = p\rho.} \tag{4.1}$$

Mais precisamente, $p\rho$ é múltiplo comum de p e P e divide todo múltiplo comum desses dois números.

Demonstração. Evidentemente, $p \mid p\rho$. Como ρ é período, o Teorema 3.1 fornece $P \mid p\rho$. Logo, $p\rho$ é um múltiplo comum de p e P.

Seja agora $C \in \mathbb{N}$ um múltiplo comum qualquer de p e P. Da condição $p \mid C$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $C = pq$. Como também $P \mid C$, temos $P \mid pq$; pelo Teorema 3.1, q é um período da 2-sequência.

Façamos a divisão euclidiana de q por ρ:

$$q = s\rho + t, \qquad 0 \leq t < \rho. \tag{4.2}$$

Como $P \mid pq$ e $P \mid p\rho$, a equação (4.2) implica $P \mid pt$. Se $t > 0$, o Teorema 3.1 diria que t é um período positivo menor que ρ, contrariando a minimalidade de ρ. Portanto, $t = 0$ e $\rho \mid q$. Consequentemente,

$$p\rho \mid pq = C.$$

Pela Definição 2.2, concluímos que $p\rho = \mathrm{mmc}(p, P)$. □

O Teorema 4.1 fornece uma equivalência: conhecer o MMC determina ρ, enquanto conhecer ρ determina o MMC. Note também que não é necessário impor $p \leq P$ nem $p \geq 4$.

Corolário 4.2 (Forma clássica)**.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1,*

$$\rho = \frac{P}{\operatorname{mdc}(p, P)} \qquad e \qquad \operatorname{mmc}(p, P) = \frac{pP}{\operatorname{mdc}(p, P)}. \tag{4.3}$$

Demonstração. A primeira identidade é (3.9); substituindo-a em (4.1), obtemos a segunda. □

O próximo resultado mostra que a caracterização não se limita aos pares em que um dos números tem a forma $2(m-1)$.

Teorema 4.3 (Representação de um MMC arbitrário)**.** *Sejam $x, y \in \mathbb{N}$. Escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $ky \geq 3$ e defina*

$$m = ky + 1, \qquad p = 2kx. \tag{4.4}$$

Se ρ é o período mínimo da 2-sequência $(b_n^{m,p})$, então

$$\boxed{\operatorname{mmc}(x, y) = x\rho.} \tag{4.5}$$

Demonstração. Temos $m \geq 4$ e o período da sequência triangular de altura m é

$$P = 2(m-1) = 2ky.$$

Pelo Teorema 4.1, $p\rho = 2kx\rho$ é o MMC de $2kx$ e $2ky$.

Mostraremos diretamente que $x\rho$ satisfaz a Definição 2.2 para x e y. Claramente, $x \mid x\rho$. Além disso, $P \mid p\rho$ significa $2ky \mid 2kx\rho$ e, cancelando $2k$, obtemos $y \mid x\rho$.

Se C é um múltiplo comum de x e y, então $2kC$ é múltiplo comum de $2kx = p$ e $2ky = P$. Pelo Teorema 4.1,

$$2kx\rho \mid 2kC.$$

Cancelando novamente $2k$, segue que $x\rho \mid C$. Portanto, $x\rho = \operatorname{mmc}(x, y)$. □

Observação 4.4. O inteiro auxiliar k serve apenas para garantir $m \geq 4$. Para $y \geq 3$, pode-se tomar $k = 1$. A fórmula (3.9) mostra ainda que

$$\rho = \frac{2ky}{\operatorname{mdc}(2kx, 2ky)} = \frac{y}{\operatorname{mdc}(x, y)},$$

de modo que o período obtido independe da escolha admissível de k.

5 Propriedades do MMC por 2-sequências

O Teorema 4.3 permite tratar o MMC como uma quantidade produzida por uma 2-sequência. Fixados $x, y \in \mathbb{N}$, escolha qualquer $k \in \mathbb{N}$ com $ky \geq 3$, tome $m = ky + 1$ e $p = 2kx$, e denote por

$$\rho_2(x, y) \tag{5.1}$$

o período mínimo de $(b_n^{m,p})$. Pela Observação 4.4, essa definição independe de k e satisfaz

$$\rho_2(x, y) = \frac{y}{\mathrm{mdc}(x, y)}. \tag{5.2}$$

Definimos então a operação determinada pelas 2-sequências por

$$M_2(x, y) = x\rho_2(x, y). \tag{5.3}$$

O Teorema 4.3 afirma precisamente que $M_2(x, y) = \mathrm{mmc}(x, y)$.

Proposição 5.1 (Propriedades estruturais)**.** *Para quaisquer $x, y, z, c \in \mathbb{N}$, valem:*

1. ***simetria:*** $M_2(x, y) = M_2(y, x)$;
2. ***idempotência e elemento neutro:*** $M_2(x, x) = x$ *e* $M_2(x, 1) = x$;
3. ***divisibilidade:***

$$x \mid y \iff M_2(x, y) = y \iff \rho_2(y, x) = 1;$$

4. ***homogeneidade:***

$$\rho_2(cx, cy) = \rho_2(x, y) \quad e \quad M_2(cx, cy) = cM_2(x, y);$$

5. ***monotonicidade por divisibilidade:*** *se $y \mid z$, então*

$$M_2(x, y) \mid M_2(x, z);$$

6. ***associatividade:***

$$M_2(M_2(x, y), z) = M_2(x, M_2(y, z)).$$

Demonstração. Se $g = \mathrm{mdc}(x, y)$, a equação (5.2) fornece

$$M_2(x, y) = \frac{xy}{g}, \tag{5.4}$$

que é simétrica em x e y, provando o item 1. Para $y = x$, o período é $\rho_2(x, x) = 1$; para $y = 1$, também $\rho_2(x, 1) = 1$. Isso prova o item 2.

Ainda por (5.2), $\rho_2(y,x) = x/g$ é igual a 1 se e somente se $g = x$, condição equivalente a $x \mid y$. Pela equação (5.4), a mesma condição equivale a $M_2(x,y) = y$, o que prova o item 3.

Como $\operatorname{mdc}(cx, cy) = c\operatorname{mdc}(x,y)$, a equação (5.2) mostra que o período não muda quando os dois argumentos são multiplicados por c. Multiplicando o primeiro argumento pelo mesmo fator em (5.3), obtemos o item 4.

Se $y \mid z$, então $M_2(x,z)$ é, pelo Teorema 4.3, múltiplo de x e de z, logo também de y. A propriedade universal demonstrada no Teorema 4.1 implica que $M_2(x,y)$ divide $M_2(x,z)$, provando o item 5.

Por fim, cada lado do item 6 é múltiplo comum de x, y, z. Além disso, cada um divide todo múltiplo comum desses três inteiros, por duas aplicações sucessivas da propriedade universal. Portanto, os dois lados são iguais. □

Proposição 5.2 (Fatores primos e períodos)**.** *Se ℓ é primo e $v_\ell(n)$ denota o expoente de ℓ na fatoração de n [2, 4], então*

$$v_\ell\Big(\rho_2(x,y)\Big) = \max\{0, v_\ell(y) - v_\ell(x)\}, \tag{5.5}$$

$$v_\ell\Big(M_2(x,y)\Big) = \max\{v_\ell(x), v_\ell(y)\}. \tag{5.6}$$

Assim, o período registra exatamente os fatores primos de y que faltam em x para formar o MMC.

Demonstração. Ponha $\alpha = v_\ell(x)$ e $\beta = v_\ell(y)$. Como

$$v_\ell(\operatorname{mdc}(x,y)) = \min\{\alpha, \beta\},$$

a equação (5.2) fornece

$$v_\ell\Big(\rho_2(x,y)\Big) = \beta - \min\{\alpha,\beta\} = \max\{0, \beta - \alpha\}.$$

Somando $\alpha = v_\ell(x)$ e usando (5.3), obtemos

$$v_\ell\Big(M_2(x,y)\Big) = \alpha + \max\{0, \beta - \alpha\} = \max\{\alpha, \beta\}.$$

□

Corolário 5.3 (Coprimalidade e produto MMC–MDC)**.** *Para $x, y \in \mathbb{N}$:*

1. $\operatorname{mdc}(x,y) = 1$ *se e somente se $\rho_2(x,y) = y$; nesse caso, $M_2(x,y) = xy$;*
2. *o MDC pode ser recuperado do período por*

$$\operatorname{mdc}(x,y) = \frac{y}{\rho_2(x,y)}; \tag{5.7}$$

3. *consequentemente,*

$$\operatorname{mdc}(x,y) M_2(x,y) = xy. \tag{5.8}$$

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem diretamente de (5.2). Para a terceira, multiplicamos (5.7) por (5.3). □

6 Exemplos e alcance das hipóteses

Exemplo 6.1 (Uma 2-sequência de período cinco)**.** Considere $m = 6$ e $p = 4$. Nesse caso, $P = 2(m-1) = 10$ e

$$(a_n^{(6)}) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \ldots).$$

A 2-sequência é

$$(b_n^{6,4}) = (4, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 2, 6, 2, \ldots). \tag{6.1}$$

Seu período mínimo é $\rho = 5$. Sem calcular previamente o MMC, o Teorema 4.1 fornece

$$\operatorname{mmc}(4, 10) = 4\rho = 4 \cdot 5 = 20.$$

Reciprocamente, o critério $10 \mid 4q$ mostra de imediato que o menor período possível é $q = 5$.

Exemplo 6.2 (O MMC de 12 e 18)**.** No Teorema 4.3, tome $x = 12$, $y = 18$ e $k = 1$. Então

$$m = 19, \qquad p = 24, \qquad P = 36.$$

Os primeiros termos amostrados formam

$$(b_n^{19,24}) = (14, 12, 2, 14, 12, 2, \ldots), \tag{6.2}$$

cujo período mínimo é $\rho = 3$. Portanto,

$$\operatorname{mmc}(12, 18) = 12\rho = 12 \cdot 3 = 36.$$

Aqui a verificação da minimalidade reduz-se a observar que $36 \mid 24q$ ocorre pela primeira vez em $q = 3$.

Observação 6.3 (A hipótese $m \geq 4$ é nítida). Para $m = 3$, temos $P = 4$ e

$$(a_n^{(3)}) = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, \ldots).$$

Escolhendo $p = 2$, resulta

$$(b_n^{3,2}) = (2, 2, 2, \ldots),$$

cujo período mínimo é 1. Entretanto, $P \nmid p$, isto é, $4 \nmid 2$. Logo, o critério do Teorema 3.1 falha para $m = 3$. Esse é exatamente o caso excluído no final da demonstração, pois então $P/2 = m - 1 = 2$ e a reflexão pode reduzir o período.

Observação 6.4 (Saltos maiores que o período). Não há necessidade de impor $p \leq P$. De fato, a sequência $(b_n^{m,p})$ depende apenas da classe de p módulo P, e o critério $P \mid pq$ permanece válido para todo $p \in \mathbb{N}$. Essa extensão é essencial na construção (4.4), em que $p = 2kx$ pode ser maior que $P = 2ky$.

Exemplo 6.5 (O MMC de 840 e 1386)**.** Vamos determinar o MMC sem começar pela fatoração simultânea dos dois números. Na construção do Teorema 4.3, tomamos

$$x = 840, \qquad y = 1386, \qquad k = 1.$$

Os parâmetros da 2-sequência são, portanto,

$$m = y + 1 = 1387, \qquad p = 2x = 1680, \qquad P = 2y = 2772. \tag{6.3}$$

Usando a expressão (2.3), os seis primeiros termos amostrados são

$$(b_n^{1387,1680}) = (1094, 588, 506, 1176, 84, 1010, \ldots).$$

Não é necessário escrever os 33 termos de um ciclo para encontrar seu período. Pelo Teorema 3.1, procuramos o menor $q \geq 1$ tal que

$$2772 \mid 1680q. \tag{6.4}$$

O algoritmo de Euclides fornece

$$\begin{aligned} 2772 &= 1 \cdot 1680 + 1092, \\ 1680 &= 1 \cdot 1092 + 588, \\ 1092 &= 1 \cdot 588 + 504, \\ 588 &= 1 \cdot 504 + 84, \\ 504 &= 6 \cdot 84. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{mdc}(1680, 2772) = 84$. Dividindo (6.4) por esse MDC, obtemos

$$33 \mid 20q.$$

Como $\mathrm{mdc}(33, 20) = 1$, segue que $33 \mid q$. O menor valor possível é, portanto,

$$\rho_2(840, 1386) = 33.$$

Finalmente, o Teorema 4.3 dá

$$\mathrm{mmc}(840, 1386) = 840 \cdot 33 = 27\,720. \tag{6.5}$$

Como verificação, $27\,720/840 = 33$ e $27\,720/1386 = 20$, de modo que o resultado é efetivamente múltiplo dos dois números.

Exemplo 6.6 (Um MMC na casa dos bilhões)**.** Considere

$$x = 1\,693\,440 \qquad \text{e} \qquad y = 6\,415\,200. \tag{6.6}$$

Suas fatorações são

$$x = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2, \tag{6.7}$$
$$y = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11. \tag{6.8}$$

Tomando novamente $k = 1$, construímos a 2-sequência com

$$m = 6\,415\,201, \qquad p = 3\,386\,880, \qquad P = 12\,830\,400. \tag{6.9}$$

Para tornar a amostragem concreta, seus primeiros termos são

$$(b_n^{6\,415\,201,\,3\,386\,880}) = (3\,386\,880, 6\,056\,642, 2\,669\,762, 717\,120, 4\,104\,000, 5\,339\,522, \ldots).$$

Podemos calcular o período de duas maneiras complementares. Primeiro, pelas equações (6.7) e (6.8),

$$p = 2x = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2,$$
$$P = 2y = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

Consequentemente,

$$\operatorname{mdc}(p, P) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640$$

e o Corolário 3.2 fornece

$$\rho_2(x, y) = \frac{P}{\operatorname{mdc}(p, P)} = \frac{12\,830\,400}{8640} = 1485. \tag{6.10}$$

Alternativamente, a Proposição 5.2 mostra quais fatores precisam aparecer no período. Comparando os expoentes de (6.7) e (6.8), temos

$$v_2(\rho_2) = \max\{0, 5-8\} = 0, \qquad v_3(\rho_2) = \max\{0, 6-3\} = 3,$$
$$v_5(\rho_2) = \max\{0, 2-1\} = 1, \qquad v_7(\rho_2) = \max\{0, 0-2\} = 0,$$
$$v_{11}(\rho_2) = \max\{0, 1-0\} = 1.$$

Portanto,

$$\rho_2(x, y) = 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 1485,$$

confirmando (6.10). Agora calculamos cuidadosamente

$$\begin{aligned}
\operatorname{mmc}(x, y) &= x\rho_2(x, y) \\
&= 1\,693\,440 \cdot 1485 \\
&= 1\,693\,440\,(1500 - 15) \\
&= 2\,540\,160\,000 - 25\,401\,600 \\
&= 2\,514\,758\,400.
\end{aligned}$$

Pela descrição em fatores primos, o mesmo número é

$$2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

pois, em cada primo, aparece o maior expoente presente em x ou em y.

7 Considerações finais

A periodicidade das 2-sequências fornece uma caracterização aritmética completa do mínimo múltiplo comum. O passo decisivo foi substituir uma análise por casos pela descrição modular das duas simetrias da sequência triangular. O Teorema 3.1 mostra que seus períodos são exatamente as soluções positivas de $P \mid pq$; por isso, o período mínimo ρ transforma o produto $p\rho$ no menor múltiplo comum no sentido forte de dividir qualquer outro múltiplo comum.

Assim, a igualdade $\mathrm{mmc}(p, 2(m-1)) = p\rho$ surge da própria estrutura da 2-sequência. A representação do Teorema 4.3 amplia esse fato para pares arbitrários de inteiros positivos, enquanto a Seção 5 mostra que as propriedades usuais do MMC podem ser lidas como propriedades dos períodos $\rho_2(x, y)$. Além de oferecer uma nova leitura para uma operação clássica da Teoria dos Números, o resultado identifica o período como uma ordem aditiva em um grupo cíclico, abrindo caminho para investigações de construções análogas em outros quocientes finitos.

Disponibilidade de dados

Este trabalho é de natureza teórica e não utiliza conjuntos de dados. Todos os argumentos necessários para reproduzir os resultados estão contidos no artigo.

Contribuições dos autores

Antônio Francisco Onofre Batista contribuiu para a investigação das 2-sequências, a sistematização dos exemplos e a redação inicial. José Carlos de Oliveira Junior contribuiu para a concepção da caracterização, a formalização e a validação das demonstrações, a supervisão da pesquisa e a revisão do manuscrito. Alisson Sousa Santos da Silva contribuiu para a concepção das 2-sequências, a investigação de suas propriedades e a revisão matemática do texto. Os três autores leram e aprovaram a versão final.

Referências

[1] Batista, Antônio Francisco Onofre. *Introdução às Sequências 2E*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, 2025. 135 f. Disponível em: https://solaris.ufnt.edu.br/handle/123456789/531.

[2] Brochero Martínez, F. E.; Moreira, C. G.; Saldanha, N. C.; Tengan, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010. (Projeto Euclides).

[3] Hefez, Abramo. *Aritmética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. 306 p. (Coleção PROFMAT, 8).

[4] Niven, Ivan; Zuckerman, Herbert S.; Montgomery, Hugh L. *An introduction to the theory of numbers*. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.

[5] Rosen, Kenneth H. *Elementary number theory and its applications*. 6th ed. Boston: Addison-Wesley, 2011.

[6] Silva, Alisson Sousa Santos da. *Um estudo sobre as 2-sequências*. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, 2023. 41 f. Disponível em: http://hdl.handle.net/11612/6386.

Recebido em 02 de Julho de 2026
Aceito em 17 de Setembro de 2026