Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

ISSN 2525-5444

EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO CALOR COM MEMÓRIA: BOA POSIÇÃO GLOBAL

Caroline Lisboa
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
caroline.c.lisboa@hotmail.com

Resumo
Neste texto lidamos com uma equação de reação difusão unidimensional com memória na fonte sujeita a condições iniciais e de fronteiras não homogêneas. Queremos mostrar a existência e unicidade de solução para esse problema, bem como a sua dependência contínua com relação às condições iniciais.

Abstract

In this text, we deal with an unidimensional reaction-diffusion equation with memory in source and subject to initial and non-homogeneous boundary conditions. We seek to prove existence and uniqueness of solutions for this problem as well as its continuous dependence on the initial conditions.

1 Introdução

Considere uma barra condutora, de dimensão linear e dimensões seccionais insignificantes, isolada termicamente do meio ambiente a não ser por suas extremidades. Se colocarmos a barra no sentido deste seu comprimento sobre o eixo x e aquecermos uma das extremidades, o fluxo de calor dar-se-á longitudinalmente, dos pontos com maior temperatura para os de menor temperatura, conforme rege a lei do resfriamento. Deste modo, estamos tratando de um problema de condução térmica unidimensional

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = 0 &= u(l,t), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,l]. \end{aligned}$$

Joseph B. Fourier(1768-1830) foi o primeiro a estudar sistematicamente o problema de condução de calor e seu nome está intrinsecamente ligado ao método de separação de variáveis, que é também conhecido como o método de Fourier. A abordagem para o problema de condução de calor através desse método nos leva a necessidade de estudar séries de Fourier (ver, por exemplo, [3, 5]).

Quando colocamos uma fonte de calor e consideramos temperaturas fixas distintas nas extremidades da barra, a equação diferencial parcial que modela esse problema é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \alpha^2 u_{xx} + g(x,t), \\
u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) &= T_2, \quad t \geq 0, \\
u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,l],
\end{aligned}
$$

onde T_1 e T_2 são constantes.

Estudaremos a existência, unicidade e dependência contínua da solução do problema de condução de calor com memória na fonte:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \alpha^2 u_{xx} + \int_0^t a(t-s)g(s,x)ds, \qquad (1.1) \\
u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) &= T_2 \quad t \geq 0, \\
u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,l].
\end{aligned}
$$

Neste caso, a função g descreve o fornecimento de calor em cada ponto x da barra no tempo t e $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é um núcleo que descreve como a história de fornecimento de calor influencia na quantidade de calor a ser fornecida no ponto x e no tempo t.

2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos a notação usada no texto e alguns resultados de séries de Fourier.

Denotaremos por $C^k([a,b])$ o conjunto de funções que são k vezes continuamente diferenciáveis. Representaremos por $C_{per}(2l)$ o conjunto das funções contínuas e periódicas de período $2l$. Denotaremos por $s[f]$ a série de Fourier de f. Além disso, dada uma função $u(x,t)$ duas vezes diferenciável, denotaremos a primeira e a segunda derivada parcial de u em relação a variável x por u_x e u_{xx}, respectivamente, e, analogamente, u_t é a derivada parcial de u com relação à t.

Definição 2.1. *Uma função f é dita seccionalmente contínua em $[a,b]$ se existe uma partição $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ do intervalo $[a,b]$ tal que f é contínua em* *cada subintervalo* (x_j, x_{j+1}), *os limites laterias* $f(x_j^+)$ *e* $f(x_{j+1}^-)$ *existem e são finitos. Denotaremos por* $SC[a,b]$ *o espaço das funções seccionalmente contínuas em* $[a,b]$.

Definição 2.2. *Sejam* $f, g \in SC_{per}(2l)$, *a convolução de* f *e* g *é a função* $f*g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$(f * g) = \frac{1}{2l}\int_{l}^{-l} f(y)g(x-y)dy.$$

Definição 2.3. *Sejam* $f, g : [0,l] \longrightarrow \mathbb{C}$, *definiremos*

$$(f|g) = \int_0^l f(x)\overline{g(x)}dx,$$

onde $\overline{g(x)}$ *é o complexo conjugado de* $g(x)$ $\ x \in [0,l]$. *Isto define um produto interno (ver, por exemplo,[3]).*

2.1 Resultados básicos sobre séries de Fourier

Nesta seção coletaremos resultados básicos sobre séries de Fourier que serão utilizados neste trabalho, (ver, por exemplo, [2]).
Queremos expressar a função f em uma série da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]. \tag{2.1}$$

A seguir, responderemos a três questões fundamentais:

(i) dada uma função $f : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}$, quando é possível expressar f como em (2.1)?

(ii) como calcular os coeficientes a_n e b_n conhecendo f ?

(iii) em que sentido a série (2.1), converge?

Apresentamos aqui a resposta dos item (i), (ii) e (iii).

(i) Podemos escrever f como em (2.1) quando f e f' são seccionalmente contínuas.

(ii) Para calcularmos tais coeficientes, conhecendo a função, precisamos estudar algumas propriedades das funções trigonométricas:

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

$$\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.3}$$

A primeira propriedade é o caráter periódico dessas funções:

Proposição 2.4. *Dado $n \in \mathbb{N}$, as funções φ_n e ψ_n definidas por (2.2) e (2.3), respectivamente, são periódicas com período fundamental $T = \frac{2l}{n}$. Em particular, $2l$ é um período comum a todas essas funções. O conjunto $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal em $[-l, l]$ se valem as seguintes relações de ortogonalidade.*

$$\int_{-l}^{l} \psi_n(x)\psi_m(x)dx \begin{cases} 0, & se \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n, \\ l, & se \quad m = n \in \mathbb{N}, \\ 2l, & se \quad m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \begin{cases} 0, & se \quad m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ l, & se \quad m = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \psi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Usando essas propriedades podemos calcular os coeficientes a_n e b_n conhecendo a função f. Em termo das funções φ_m e ψ_n, podemos reescrever (2.1) como:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\psi_n + b_n\varphi_n]. \tag{2.4}$$

Calculando formalmente os produtos internos $(f|\psi_0), (f|\psi_n)$e$(f|\varphi_n)$, obtemos, respectivamente:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx, \tag{2.5}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \tag{2.6}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \tag{2.7}$$

As fórmulas para os cálculos de a_n e b_n são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier.

(iii) A reposta do item (iii) são os teoremas:

Teorema 2.5. *Suponha que $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para f.*

Teorema 2.6. *Seja $f \in SC_{per}(2l)$ e suponha que f é diferenciável, a menos de um número finito de pontos em $(-l, l)$ com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ a série de Fourier de f no ponto x converge a $\frac{(f(x^+)+f(x^-))}{2}$.*

O Teorema 2.5 nos dá convergência uniforme enquanto que o Teorema 2.6 nos dá convergência pontual.

2.2 Equação do calor homogênea

Considere a equação de calor

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 &= u(l,t), \quad t \geq 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,l]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

A ideia do método de separação de variáveis é procurar soluções:

$$u \in C^2((0,l) \times (0,\infty)) \cap C([0,l] \times [0,+\infty)),$$

da forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{2.9}$$

Impondo a condição de contorno, $u(0,t) = 0 = u(l,t), x \in [0,l]$ obtemos,

$$\varphi(0)\psi(t) = 0 = \varphi(l)\psi(t), \forall t \geq 0,$$

Obtém-se:

$$\varphi_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0,l], \tag{2.10}$$

e

$$\psi(t) = Ke^{-\alpha^2 \lambda t}.$$

Pelo princípio da superposição,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \quad x \in [0,l], \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

Impondo a condição inicial, obtemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) x \in [0, l]. \tag{2.12}$$

Então a série em (2.11) converge uniformemente em $[0, l] \times [0, +\infty]$ para uma função $u \in C([0, l]) \times [0, +\infty)) \cap C^{\infty}([0, l] \times (0, +\infty))$ que é a única solução do problema de condução do calor homogêneo. Para mais detalhes ver [3, 2]

Lema 2.7 (Lema de Riemann Lebesgue). *Se* $f \in SC([0, l])$ *e*

$$s[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\psi_n + b_n\varphi_n)$$

é sua série de Fourier , então

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Teorema 2.8 (Teste M. de Weierstrass). *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio e* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *uma sequência em* $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. *Suponha que existe uma sequência numérica* $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Então a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente em* Ω.

3 Resultado principal

Nesta seção estudaremos a existência, unicidade e dependência contínua da solução para a equação:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \int_0^t a(t-s)g(x,s)ds, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{3.3}$$

Aqui, $g \in C([0,l] \times [0,+\infty))$ é limitada na variável t, e $A : [0,+\infty) \to [0,\infty)$ é definida por $A(t) = \int_0^t |a(s)|ds$.

Teorema 3.1. *Seja $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ diferenciável a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC[0,l]$, e suponha que $A : [0,+\infty) \to [0,\infty)$ é limitada. Então, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l}), \tag{3.4}$$

onde

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1\right] \\ &+ \int_0^t \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-s)\right) \int_0^s a(s-r) g_n(r) dr ds, \end{aligned}$$

converge uniformemente em $[0,l] \times [0,+\infty)$, e

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{3.5}$$

é a única solução do problema(3.1)-(3.3).

Precisaremos de alguns lemas na demonstração desse teorema.

Lema 3.2. *Se $A : [0,\infty) \to [0,\infty)$, definida por $A(t) = \int_0^t |a(s)|ds$, e $h : [0,l] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $H : [0,l] \to \mathbb{R}$ definida por $H(t) = a * h(t)$, é contínua.*

Demonstração: Usando as substituições $t - s = \beta \quad \Rightarrow ds = -d\beta$ e $t_0 - s = \eta \quad \Rightarrow ds = -d\eta$, temos:

$$\begin{aligned} H(t) - H(t_0) &= \int_0^t a(t-s)h(s)ds - \int_0^{t_0} a(t_0 - s)h(s)ds \\ &= \int_0^t a(\beta)h(t-\beta)d\beta - \int_0^{t_0} a(\eta)h(t_0 - \eta)d\eta. \end{aligned}$$

Fazendo $\beta = s$ e $\eta = s$, temos:

$$\begin{aligned} H(t) - H(t_0) &= \int_0^t a(s)h(t-s)ds - \int_0^{t_0} a(s)h(t_0 - s)ds \\ &= \int_0^{t_0} a(s)h(t-s)ds + \int_{t_0}^t a(s)h(t-s)ds - \int_0^{t_0} a(s)h(t_0 - s)ds \\ &= \int_0^{t_0} a(s)[h(t-s) - h(t_0 - s)ds + \int_t^{t_0} a(s)h(t-s)ds \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |H(t) - H(t_0)| \leq \int_0^t |a(s)[h(t-s) - h(t_0 - s)|ds + \int_{t_0}^t |a(s)h(t-s)|ds. \quad (3.6)$$

Note que, $h : [0, l] \to \mathbb{R}$ é contínua no compacto, neste caso h é uniformemente contínua. Então,

$$\forall \ \ \epsilon > 0, \ \ \exists \ \ \delta > 0, |s_1 - s_2| < \delta, \ \ s_1, s_2 \in [0, l] \implies |h(s_1) - h(s_2)| < \frac{\epsilon}{2A},$$

onde $A = \displaystyle\int_0^\infty |a(s)|ds$. Assim,

$$|(t-s) - (t_0 - s)| = |t - t_0| < \delta,$$

$$\Longrightarrow \int_0^t |a(s)[h(t-s) - h(t_0 - s)]|ds < \frac{\epsilon}{2A} \int_o^t |a(s)|ds < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.7)$$

Mas,

$$\int_{t_0}^t |a(s)|ds \quad \text{é um número muito pequeno} \quad \Leftrightarrow A(t) = \int_0^t |a(s)|ds \ \ \text{é contínua} \ .$$

Segue que

$$\int_{t_0}^t |a(s)|ds < \frac{\epsilon}{2 \sup |h(t)|} \Rightarrow \quad \int_{t_0}^t |a(s)h(t-s)|ds \leq \sup_{t \geq 0} |h(t)| \int_{t_0}^t |a(s)|ds < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.8)$$

De (3.6), (3.7) e (3.8), temos $|H(t) - H(t_0)| < \epsilon$. □

Lema 3.3. *Se $g : (0, l) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada $g'(x, \cdot) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua, então g_n (coeficientes de Fourier de $g(x, \cdot)$ são funções contínuas e limitada para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Demonstração: A função $g(x, \cdot)$ é contínua em $[0, l]$ e $g'(x, \cdot)$ é seccionalmente contínua em $x \in [0, l]$. Dessa forma, pelo Teorema 2.5 sua série de Fourier é:

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

Vamos mostrar que $g_n : [0, l] \to \mathbb{R}$ é contínua. Usando (2.7), temos:

$$g_n(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x, t) \sin(\frac{n\pi x}{l})dx.$$

E
$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, |t - t_0| < \delta \Rightarrow |g(x,t) - g(x,t_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Assim,
$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |g(x,t) - g(x,t_0)|dx < \frac{1}{l}\frac{\epsilon}{2}\int_{-l}^{l} dx = \frac{1}{l}\frac{\epsilon}{2}2l = \epsilon.$$
Segue que, $g_n(t)$ é contínua. Mostraremos que $g_n(t)$ é limitada. Com efeito,
$$|g_n(t)| \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |g(x,t)|dx \leq \sup_{x\in[0,l]t>0} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx = 2M.$$

□

Demonstração do Teorema 3.1: Tentaremos uma solução da forma:
$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.9}$$

Esta expressão já satisfaz as condições de fronteira. Precisamos escolher os coeficientes $b_n(t)$ de tal forma que $u(x,t)$ satisfaça a equação do calor não homogênea e a condição inicial. Esta última, obviamente, será satisfeita se tivermos
$$b_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1.$$
Substituindo (3.9) formalmente na equação (3.1), inferimos que
$$b_n'(t) = \frac{-\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}b_n(t) + \int_0^l a(t-s)g_n(s)ds. \tag{3.10}$$

Resolveremos a equação (3.10) utilizando o Método de Variação de Parâmetros. Usando o fator integrante $\exp\left(\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}\right)$, obtemos
$$(\exp(\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}t)b_n(t))' = \exp(\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}t)\int_0^t a(t-s)g_n(s)ds.$$

Assim,
$$\begin{aligned} b_n(t) &= \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}t\right)\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1\right] \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}(t-s)\right)\int_0^s a(s-r)g_n(r)drds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para que (3.9) seja de fato solução do problema, devemos mostrar que $\sum b_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$ converge uniformemente no intervalo $[\epsilon,\infty)$, para todo $\epsilon>0$. Com efeito, mostraremos que $\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}\epsilon\right)$, converge, se $\epsilon>0$, pelo teste da razão: Desde que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\exp(\frac{-\alpha^2(n+1)^2\pi^2}{l^2}\epsilon)}{\exp(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}\epsilon)}\right| \\
&= \left|\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2\epsilon-\alpha^2 2n\pi^2\epsilon-\alpha^2n^2\epsilon}{l^2}\right)\exp\left(\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}\epsilon\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\exp\left(\frac{\alpha^2 2n\pi^2\epsilon+\alpha^2\pi^2\epsilon}{l^2}\right)}\right|<1,
\end{aligned}
$$

segue que $\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}\epsilon\right)$, converge. Como

$$
\left|\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)\right|\leq\left|\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}\epsilon\right)\right|,
$$

para $t\geq\epsilon$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)$ converge uniformemente em $t\in[\epsilon,\infty)$ pelo Teste M. de Weierstrass.

Agora, temos que

$$
\begin{aligned}
|b_n(t)| &= \left|\exp\left(-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+(T_2-T_1)\frac{x}{l}+T_1\right]\right. \\
&+ \left.\int_0^t\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}(t-s)\right)\int_0^s a(s-r)g_n(r)drds\right| \\
&\leq \exp\left(-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)c+a_n,
\end{aligned}
$$

onde

$$
a_n = \int_0^t\exp\left(\frac{-\alpha^2n^2\pi^2}{l^2}(t-s)\right)\int_0^s a(s-r)g_n(r)drds
$$

e

$$
c=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+(T_2-T_1)\frac{x}{l}+T_1,
$$

é uma constante independente de t. A sequência a_n é limitada. De fato, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^t \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \exp\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} s\right) \int_0^s a(s-r) g_n(r) dr ds \\ &= \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \left[\exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)\left(\frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\right) - \frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\right] \int_0^s a(s-r) g_n(r) dr \end{aligned}$$

e

$$\left|\int_0^l a(s-r) g_n(r) dr\right| \leq \int_0^s |a(s-r)| dr \cdot 2M \leq 2M \int_0^\infty |a(r)| dr = 2M \sup_{t \geq 0} A(t) = C.$$

Então,

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\left[\frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2} - \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\right] \int_0^s a(s-r) g_n(r) dr\right| \\ &= \left|\left[\frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2} - \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\right]\right| \left|\int_0^s a(s-r) g_n(r) dr\right| \\ &\leq \left|\frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\left(1 - \exp\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)\right)\right| C. \end{aligned}$$

Como $\left(1 - \exp\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)\right) \in (0,1)$, segue que

$$|a_n| \leq \left|\frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2}\left(1 - \exp\left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)\right)\right| C < \frac{l^2}{\alpha^2 n^2 \pi^2} C = \frac{l^2 C}{\alpha^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente, segue que $|\sum a_n|$ converge absolutamente, pelo teste da comparação. Portanto $\sum a_n$ converge.

A partir dessas observações podemos concluir que $\sum b_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l})$ converge uniformemente para $(x,t) \in [0,l] \times [\epsilon, \infty)$, pois

$$|b_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l})| = |b_n(t)| |\sin(\frac{n\pi x}{l})| \leq |b_n(t)|$$

e $b_n(t)$ converge, pelo Teste M. de Weierstrass.

Para mostrar $b_n(t) \to b_n(0)$, quando $t \to 0$, é suficiente mostrar que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_0^t \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-s)\right) \int_0^s a(s-r) g_n(r) dr ds = 0$$

Mas isto é feito de maneira similar a estimativa de $|a_n|$ junto com o teorema do confronto.

A unicidade da solução da equação:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + \int_0^t a(t-s)g(s,x)ds, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

é demonstrada da seguinte maneira: Sejam v e w soluções de (3.1), então $z = v - w$ é solução de:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \\ u(0,t) &= 0 = u(l,t), \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como, $z \equiv 0$ é a única solução de (3.12). Então $v = w$.

Será analisada a dependência contínua nos dados iniciais: f e $g \in C([0,l])$ e $f', g' \in SC([0,l])$. Sejam u e $\tilde{u}$ são as soluções de (3.1) com condição iniciais f e $\tilde{f}$, respectivamente.

Então, usando (3.5), se $t > 0$, temos:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right) \frac{2}{l} \left[\int_0^l [f(y) - \tilde{f}(y)] \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \right|. \\ &\leq 2||f - \tilde{f}||_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \end{aligned}$$

onde

$$||f - \tilde{f}||_\infty = \max_{x \in [0,l]} |f(x) - \tilde{f}(x)|.$$

Observe que $|f - \tilde{f}| \in C([0,l])$, logo atinge um máximo em $[0,l]$; portanto, para cada $t > 0$, dado $\epsilon > 0$, se $\delta > 0$ é tal que $2\delta M < \epsilon$, onde

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right).$$

Então, para cada $t > 0$ fixado,

$$||f - \tilde{f}|| < \delta \Rightarrow |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \epsilon, \quad \forall x \in [0,l].$$

Em outras palavras, pequenas variações na condição inicial acarretam pequenas variações, para cada $t > 0$ fixo, na solução final. $\square$

Referências

[1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, Guanabara Dois, 1985.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Djairo Guedes de Figueiredo. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007

[3] IóRIO, Valéria, *EDP, Um curso de graduação*, Valéria Iório. 3.ed. Rio de Janeiro: 2010.

[4] RODNEY, Josué, *Introdução à EDP* , Josué Rodney. Minas Gerais: 2007.

[5] SIMMONS, George F, *Differential Equations With Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill: 1991 .

[6] TVEITO Aslak; WINTHER Ragnar, *Introduction to Partial Differential Equations*, Aslak Tveito, Ragnar Winther. Norway: 1998.