REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

ALGUNS ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS NA TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Daniela Mota Teixeira
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
danymota2010@gmail.com

Resumo
Neste artigo mostraremos a completude de alguns espaços importantes no estudo de equações diferenciais.

Abstract

In this article we will prove the completeness of some important spaces in the study of differential equations.

1 Introdução

A elaboração deste texto foi motivada a partir da diversidade de espaços métricos reconhecidos como completos e que aparecem na teoria das equações diferenciais, tanto clássica quanto moderna.

Dentre as aplicações mais importantes da teoria de espaços métricos em equações diferenciais está o teorema do ponto fixo de Banach. Com efeito, dado um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \\ \varphi(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

podemos transformá-lo em uma equação integral da seguinte forma

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds. \tag{1.2}$$

Para determinar a extistência de (1.2), recorremos a algum teorema de ponto fixo, mais precisamente o teorema do ponto fixo de Banach. Para isso, é definido um operador

$$F : \mathcal{C}(I; B) \longrightarrow \mathcal{C}(I; B)$$

onde o conjunto $\mathcal{C}(I; B)$ é o espaço de aplicações contínuas $\varphi : I \longrightarrow B$. Mas para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach, $\mathcal{C}(I; B)$ deve ser um espaço completo.

Em meio aos muitos trabalhos referentes às aplicações dos espaços presentes neste texto, é interessante citar alguns destes, como os trabalhos de Andrade e Viana [2], Arrieta e Carvalho [1] e Nishiguchi [3]. Dentre os espaços estudados nesse texto, um deles é o X_β, caracterizado do seguinte modo

$$X_\beta = \{u \in \mathcal{C}((0,T];\mathbb{E}) : \|u\|_{X_\beta} = \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} < +\infty\}$$

tal que $\beta > 0$ em que o espaço é um conjunto de aplicações contínuas em $\mathcal{C}((0,T];\mathbb{E})$, no qual $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach.

Em [2], X_β é definido com $\mathbb{E} = L^r(\mathbb{R}^n)$, porém não é mostrado que tal espaço é de Banach. Neste texto, mostraremos que X_β é, de fato, um espaço de Banach.

Já em [1], X_β é denotado por $K(\tau_0)$, em que o mesmo é um conjunto de aplicações contínuas em $\mathcal{C}((0,\tau_0];X^{1+\epsilon})$, onde $\epsilon > 0$ e $X^{1+\epsilon}$ é um espaço de potências fracionárias de um operador e além disso um espaço de Banach. E o objetivo do texto é mostrar um teorema de existência e unicidade para equações do tipo $x' = Ax + f(t,y)$, resultado que pode ser aplicado a equações de Navier-Stokes e equações de calor.

Ao final, consideraremos o espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ (ver Definição 3.1) que é similar àquele tomado em [3], no qual é mostrado sua completude. O objetivo de [3] é estudar uma condição para solucionar problemas de valor inicial em equações diferenciais com retardo. Aqui, estamos interessados em dar detalhes da demonstração da Proposição 2.2 de [3].

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentaremos a notação básica utilizada no texto e alguns resultados do estudo de espaços métricos. Para conhecer as definições iniciais, consultar o livro *Espaços Métricos* [4]. Além disso, incluiremos algumas demonstrações para conveniência do leitor.

Denotaremos por d a métrica e por M o espaço métrico. Adotaremos a notação $\|\cdot\|$ para representar a norma de um espaço vetorial. Além disso, utilizaremos $\mathbb{E}$ para representar o espaço de Banach, que é um espaço vetorial normado e completo.

Proposição 2.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy. E sendo de Cauchy, é limitada.*

Definição 2.2. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação bijetiva $f : M \longrightarrow N$ tal que $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ é denominada isometria.*

Definição 2.3. Um homeomorfismo é uma aplicação bijetiva $f : M \longrightarrow N$ contínua, tal que, sua inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua.

Definição 2.4. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é dita uniformemente contínua quando para todo $\epsilon >$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Definição 2.5. *Um homeomorfismo uniforme é uma bijeção $g : M \longrightarrow N$ unirfomemnte contínua e sua inversa $g^{-1} : N \longrightarrow M$ também é.*

Proposição 2.6. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme. Uma sequência de pontos $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $g : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Pela Definição 2.4, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in M$. Mas, por hipótese, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < \delta$. Mas a continuidade uniforme implica que $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$. Logo $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, seja $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em N. Mas, pela Definição 2.5, $f^{-1} : N \longrightarrow M$ é uniformemente contínua, o que implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. $\square$

Observação 2.7. Um homemorfismo que é uma isometria é um homeomorfismo uniformemente contínuo. Além disso, dados dois espaços M e N tais M é completo, então a completude de M implica na completude de N.

Observação 2.8. A proposição 2.6 será útil na demonstração do Teorema 3.3.

Definição 2.9. *O espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Definição 2.10. *Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \to M$ uma aplicação. A notação $B_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \to M$ tais que $d(f, \alpha) = \sup_{x\in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.*

Proposição 2.11. *Se o espaço métrico M é completo então $B_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B_\alpha(X;M)$. Fixe $x \in X$ de maneira arbitrária, assim a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M. Por M ser completo, existe para cada $x \in X$, o limite desta sequência. Neste caso, $\lim f_n(x) =: f(x) \in M$.

Como a sequência é de Cauchy, pela Proposição **??**, esta é limitada; então existe $c > 0$ tal que

$$d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Fazendo $n \to \infty$ concluímos que $d(f(x), \alpha(x)) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo $f \in B_\alpha(X;M)$.

Agora, resta provar que $f_n \to f$ uniformemente em X. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$ para qualquer $x \in X$, uma vez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Daí, fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) = d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ para todo $x \in X$. Portanto, $f_n \to f$ uniformemente, como queríamos demonstrar. □

Proposição 2.12. *Todo subespaço fechado de um espaço de Banach é Banach. Reciprocamente, todo subespaço de Banach de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset \mathbb{E}$ tal que F é fechado. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em F. Mas, como $F \subset \mathbb{E}$ então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$, que por sua vez é completo, logo $x_n \mapsto x \in \mathbb{E}$, que implica que $x \in \overline{F}$. E como F é fechado, temos que $x \in F$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em F. Portanto F é completo.

Reciprocamente, seja F um subespaço de Banach de $\mathbb{E}$. Considere $y \in \overline{F}$, isto é, y é aderente a F, então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F tal que $y_n \mapsto y$. Pela Proposição 2.1, podemos afirmar que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em F, e este é completo, logo $y \in F$. Portanto, F é fechado. □

3 Resultados Principais

Nesta seção será mostrada a completude de alguns espaços importantes no estudo de equações diferenciais. O estudo desses espaços motivaram a elaboração deste artigo e além disso, foram citados na introdução, alguns textos que se utilizaram de tais espaços.

Teorema 3.1. *O conjunto X_β é um espaço de Banach.*

Demonstração. Inicialmente será verificado que a função proposta sobre X_β,

$$\|u\|_{X_\beta} = \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}}$$

é de fato uma norma. Uma vez que, todo espaço normado torna-se um espaço métrico através da definição $d(x,y) = \|x - y\|$. Isto implica que a métrica provém da norma $\|\cdot\|$.

Sejam $u, v \in X_\beta$ e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ temos que

- $\|u\|_{X_\beta} = \sup\limits_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \neq 0.$

- Como $\sup(\lambda f(x)) = \lambda \sup(f(x))$, note que

$$
\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{X_\beta} &= \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|\lambda u(t)\|_{\mathbb{E}} \\
&= |\lambda| \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \\
&= |\lambda| \|u\|_{X_\beta}
\end{aligned}
$$

- Uma vez que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$, podemos aplicar tal propriedade para obter

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{X_\beta} &= \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)+v(t)\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \left(\|u(t)\|_{\mathbb{E}} + \|v(t)\|_{\mathbb{E}}\right) \\
&\leq \|u\|_{X_\beta} + \|v\|_{X_\beta}
\end{aligned}
$$

Portanto, $\|u\|_{X_\beta}$ é uma norma e X_β é um espaço métrico.

Agora, mostraremos que tal espaço é completo. Pela Definição 2.9, tome $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\beta$ de Cauchy e portanto, $\sup\limits_{t\in(0,T]} t^\beta \|u_n(t)\| < +\infty$. Posteriormente, defina $v_n(t) = t^\beta u_n(t) \in B((0,T],\mathbb{E})$ e note que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, com $m, n \geq n_0$, tal que

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in(0,T]} \|v_n(t) - v_m(t)\|_{\mathbb{E}} &= \sup_{t\in(0,T]} \|t^\beta u_n(t) - t^\beta u_m(t)\|_{\mathbb{E}} \\
&= \|u_n - u_m\|_{X_\beta} < \epsilon
\end{aligned}
$$

Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $B((0,T],\mathbb{E})$. Pela Proposição 2.11, pode-se afirmar que $B((0,T],\mathbb{E})$ é completo, uma vez que $\mathbb{E}$ por hipótese é um espaço de Banach e a função α fixada é a função identicamente nula. Daí, pela Definição 2.9, temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $v \in B((0,T],\mathbb{E})$ tal que

$$
\sup_{t\in(0,T]} \|v_n(t) - v(t)\|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0,
$$

quando $n \to \infty$, isto é,

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|u_n(t) - t^{-\beta} v(t)\|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

É fácil ver que $u(t) = t^{-\beta} v(t) \in X_{\beta}$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_\beta} &= \sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= \sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|t^{-\beta} v(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= \sup_{t \in (0,T]} \|v(t)\|_{\mathbb{E}} < +\infty. \end{aligned}$$

Logo, $u(t) = t^{-\beta} v(t) \in X_{\beta}$ e portanto X_{β} é um espaço de Banach. $\square$

3.1 Espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$

Esta seção é destinada ao estudo do espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$. Assim, fixaremos algumas notações especiais.

Denotemos por I o intervalo $I = [-r, 0]$ com $r > 0$ e o conjunto de aplicações de I em $\mathbb{E}$ contínuas, denotaremos por $\mathcal{C}(I, \mathbb{E})$. Considere ainda, a seguinte notação $[t_0, t_0 + b] + I := \{t + \theta : t \in [t_0, t_0 + b], \theta \in I\}$.

Definição 3.2. *Seja $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$ tal que*

- *Se $J = [t_0, t_0 + b]$, para algum $b > 0$. Dizemos que a aplicação $x : J + I \longrightarrow \mathbb{E}$ é uma continuação de (t_0, ϕ_0) sempre que $x_{t_0} = \phi_0$ e quando x for contínua em J. Quando $t_0 = 0$, é dito simplesmente que x é uma continuação de ϕ_0. Além disso, se $x_{|J}$ é diferenciável, dizemos que x é uma C^1-continuação.*

- *Para $b > 0$, defina*

$$\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b) = \{x \in \mathcal{C}(J + I, \mathbb{E}) : x \text{ é uma continuação de } (t_0, \phi_0)\}$$

Chamamos o espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ como o espaço de continuação de comprimento (t_0, ϕ_0).

- *Para $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{E})$ considere a continuação de ϕ do seguinte modo*

$$\overline{\phi} := \begin{cases} \phi(s), & s \in I \\ \phi(0), & s \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Seja* $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$. *Para todo* $b > 0$, *o espaço* $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Considere o espaço $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ e note que o conjunto é um espaço vetorial. Como todo $x \in \mathcal{C}_{0,0}(b)$ é contínuo e limitado, $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ torna-se um espaço vetorial normado munido da métrica do supremo.

Defina o conjunto

$$Y_b := \{y \in \mathcal{C}([0,b], \mathbb{E}); y(0) = 0\}.$$

Note que $Y_b \subset \mathcal{C}([0,b], \mathbb{E})$ é fechado, mas o fato de $\mathcal{C}([0,b], \mathbb{E})$ ser um espaço de Banach, pela Proposição 2.12, Y_b também é Banach.

Além disso, o fato de $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ e Y_b serem isometricamente homeomorfos implica que $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ também é um espaço de Banach. Defina o operador $\mathcal{N} : \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b) \longrightarrow \mathcal{C}_{0,0}(b)$, com $b > 0$ e $s \in [0,b] + I$, por

$$\mathcal{N}x(s) = x(t_0 + s) - \overline{\phi}_0(s).$$

Inicialmente será mostrado que $\mathcal{N}x$ é contínuo. Temos que $t \mapsto x(t + \theta)$ é contínuo, $t \in [t_0, t_0 + b]$. Logo, $s \mapsto x(t_0 + s + \theta)$ é conínuo, $s \in [0,b]$. Então,

$$s \mapsto \mathcal{N}x(s + \theta) = x(t_0 + s + \theta) - \overline{\phi_0}(s + \theta)$$

é contínuo, uma vez que $\phi_0 \in \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$.

Agora, mostraremos que $\mathcal{N}$ está bem definido. Seja $x \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ e $\theta \in I$, note que

$$(\mathcal{N}x)_0(\theta) = \mathcal{N}x(\theta) = x(t_0 + \theta) - \overline{\phi_0}(\theta) = x_{t_0}(\theta) - \overline{\phi_0}(\theta) = \phi_0(\theta) - \phi(\theta) = 0.$$

Logo, $\mathcal{N}$ está bem definido.

Além disso, será provado que $\mathcal{N}$ é bijetivo. Sejam $x, y \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ tais que $\mathcal{N}x = \mathcal{N}y$ daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}x(s) &= \mathcal{N}y(s) \\ \Longleftrightarrow x(t_0 + s) - \overline{\phi}_0(s) &= y(t_0 + s) - \overline{\phi_0}(s) \\ \Longleftrightarrow x(t_0 + s) &= y(t_0 + s), \end{aligned}$$

para todo $s \in [0,b] + I$. O que implica que $x = y$ em $s \in [t_0, t_0 + b] + I$. Portanto, $\mathcal{N}$ é injetivo.

Considere $y \in \mathcal{C}_{0,0}(b)$, isto é, $y : [0,b] + I \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $y_0(\theta) = 0$ para todo $\theta \in I$ e $t \mapsto y(t + \theta)$, com $t \in [0,b]$ contínuo. Considere $x \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ de modo que $x(t_0 + t + \theta) = y(t + \theta) + \overline{\phi_0}(t + \theta)$ daí,

$$\mathcal{N}(t + \theta) = x(t - 0 + t + \theta) - \overline{\phi_0}(t + \theta) = y(t + \theta),$$

$\theta \in I$. O que implica que $y = \mathcal{N}x$. Logo, $\mathcal{N}$ é sobrejetivo.

Por último, mostraremos que o operador $\mathcal{N}$ é de fato uma isometria, isto é,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}x - \mathcal{N}y\| &= \sup_{s \in [0,b]+I} \|x(t_0 + s) - \overline{\phi_0}(s) - y(t_0 + s) + \overline{\phi_0}(s)\| \\ &= \sup_{s \in [0,b]+I} \|x(t_0 + s) - y(t_0 + s)\| \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

com $x, y \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$. Logo, $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ é um isometricamente homeomorfo a $\mathcal{C}_{0,0}(b)$. Portanto, pela Proposição 2.6 , $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ é completo. $\square$

Referências

[1] Arrieta, José M.; Carvalho, Alexandre N.: Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 1, 285-310.

[2] de Andrade, Bruno; Viana, Arlúcio: On a fractional reaction-diffusion equation, Z. Angew. Math. Phys. **68** (2017), no. 3, Art. 59, 11 pp.

[3] J. Nishiguchi, A necessary and sufficient condition for well-posedness of initial value problems of retarded functional differential equations, J. Differential Equations **263** (2017), no. 6, 3491–3532.

[4] LIMA, Elon L. *Espaços Métricos*, Elon Lages Lima. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.