REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Pedro Pessoa
Instituto Federal de Pernambuco - IFPE
pedro.pessoa.mat@gmail.com

Rodrigo Gondim
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
rodrigo.gondim@ufrpe.br

Resumo

Neste pequeno texto trazemos algumas considerações gerais sobre racionalização de denominadores e provamos dois resultados gerais sobre como racionalizar denominadores algébricos. Tais resultados podem ser facilmente entendidos utilizando isomorfismos entre anéis, aqui damos demonstrações elementares, algorítmicas e efetivas. Acreditamos que esse ponto de vista pode ser compartilhado a estudantes mais interessados no ensino médio como complementação de sua formação ou como parte de um projeto de iniciação científica Jr.

Abstract

In this short text we bring some general considerations on rationalization of denominators and we prove two general results on how to rationalize algebraic denominators. Such results can be easily understood by using isomorphisms between rings, here we give elementary, algorithmic and effective demonstrations. We believe that this viewpoint can be shared with most interested students in high school as a complement to their training or as part of a Jr. scientific initiation project.

1 Introdução: Uma pequena reflexão sobre racionalização de denominadores

Todos sabemos que um número racional pode ser expresso como uma fração com numerador e denominador inteiros e coprimos, essa expressão é dita fração irredutível pois não pode ser simplificada. Infelizmente, não há um análogo para os número reais em geral. Digo em geral pois em alguns casos pode-se simplificar um número real "racionalizando seu denominador". Do ponto de vista prático o processo tornou-se um grande êxito uma vez que seria muito difícil encontrar uma boa aproximação para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ usando uma boa aproximação de $\sqrt{2} \simeq 1,4142$ pois teríamos que fazer $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq \frac{1}{1,4142} = \frac{10000}{14142}$. Por outro lado, utilizando o famoso truque de multiplicar por $\sqrt{2}$, obtemos $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \frac{1,4142}{2} \simeq 0,7071$. Assim, entendemos a necessidade prática de se fazer a chamada racionalização de denominadores para encontrar boas aproximações de certos números irracionais, numa época em que não havia calculadoras nem computadores.

Em primeiro lugar gostaríamos de enfatizar que a nomenclatura "racionalização de denominadores" tem um problema de partida. Denominador é o termo utilizado para se referir à frações, e portanto, números racionais. Por uso comum vamos continuar utilizando-a querendo exprimir o número b em uma expressão do tipo $\frac{a}{b}$ em que ambos, a, b sejam expressões polinomiais de símbolos algébricos conhecidos, utilizando assim adições, subtrações, potências e raízes de qualquer ordem.

As mais famosas fórmulas de racionalização de denominadores se utilizavam de fatorações algébricas clássicas aplicando-as ao caso do denominador possuir uma certa raiz. Assim, temos:

(i) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

(iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

(iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

(v) $\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}$.

Claramente poderíamos introduzir uma dezena de "novas fórmulas" de racionalização utilizando fatorações menos "famosas", mas não é esse nosso intuito. Seria interessante buscar um princípio geral que regesse todas as possíveis racionalizações. Gostaríamos ainda de salientar que em todos os casos conhecidos o denominador em questão é um radical (ou soma/subtração) de radicais de expressões racionais. Tais números fazem parte de uma classe muito importante de números reais, eles são os números algébricos. Em contrapartida existem ainda, no conjunto dos números reais, números que não são algébricos, eles são chamados transcendentais. Um exemplo muito conhecido de número transcendental é o π, aqui lançamos uma pergunta:

O que significaria racionalizar a expressão $\frac{1}{\pi}$? Isso faz algum sentido?

Não existe nenhum truque extraordinário que possa ser aplicado no caso em que o denominador é um número transcendental, não faz sentido falar em racionalização de denominadores de números transcendentais. De fato, por definição, um número transcendental não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Isso impossibilita a busca de uma racionalização nesse caso. Fim.

Então nos voltamos aos números algébricos, aqueles que são raízes de equações com coeficientes inteiros, como $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Formalizaremos a definição dessa classe de números no texto, daremos algumas ideias intuitivas sobre como construí-los e finalmente provaremos que:

> *Se $\alpha \in \mathbb{R}^*$ é um número algébrico, então a expressão $\frac{1}{\alpha}$ pode ser racionalizada, isto é, existem números inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ tais que*
>
> $$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Provaremos ainda um resultado mais geral com o qual podemos atacar diversos problemas olímpicos como observado em [1, 4, 7]. Esse resultado pode ser facilmente entendido utilizando-se Álgebra em nível superior, mais precisamente o Teorema do Isomorfismo da teoria básica dos anéis (ver [3]). Nesse texto daremos uma demonstração elementar do resultado utilizando polinômios e sua aritmética (como em [6, 7]). Nossa demonstração é algorítmica e efetiva, durante o texto faremos vários exemplos explícitos mostrando a dificuldade computacional em alguns casos e a importância dos resultados em outros casos. A motivação do estudo do tema foi uma vasta gama de problemas de Olimpíadas e vestibulares que exigiam racionalizações não tradicionais. A fim de deixar o texto autocontido lembraremos alguns resultados clássicos sobre polinômios que muitas vezes são renegados. A teoria aqui apresentada se assemelha fortemente à aritmética dos inteiros sendo o Lema de Bézout nossa ferramenta fundamental (ver [6, 7]).

2 Outras formas de racionalizar

2.1 Um exemplo explícito

Para racionalizar o denominador de uma fração geralmente se usa uma fatoração clássica também denominada produto notável. Porém, há uma infinidade de frações cujo denominador não se adapta aos produtos notáveis. Uma situação que se encaixa neste contexto foi proposta na prova de matemática do vestibular de ingresso para a UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e para a UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco) realizado pela COVEST- COPSET (Comissão de Processos Seletivos e Treinamentos) no ano de 1999 em sua fase 2, problema 03.

Problema 2.1. Considerando $\dfrac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$, determine $41(a+2b+c)$.

É natural tentar associar uma técnica que envolva algum dos produtos notáveis estudados no ensino básico, no intuito de transformar $1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, num número racional. Isto não é natural uma vez que aparece a parcela $3\sqrt[3]{2}$ e não simplesmente $\sqrt[3]{2}$. Uma possibilidade seria estabelecer condições aos racionais *a,b* e *c* de modo que:

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \cdot (1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = 1. \quad (*)$$

Como $1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ é irracional e na igualdade acima há um produto de dois reais que equivale a 1, então $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ é também irracional pois, do contrário, ocorreria um produto de um racional não-nulo com um irracional que equivaleria a um racional, o que não é possível. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em $(*)$ obtemos

$$(a+2b+6c) + (3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4} = 1.$$

Observe que sendo a, b, c são racionais tais que $a\cdot b\cdot c \neq 0$ e que a soma do lado esquerdo da igualdade acima é igual a $1 \in \mathbb{Q}$, então $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4}$ deve ser racional. Porém a soma de dois irracionais só é racional se somarem zero, ou seja, $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} = -(a+3b+c)\sqrt[3]{4}$. Multiplicando por $\sqrt[3]{2}$, tem-se $(3a+b+2c)\sqrt[3]{4} = -2\cdot(a+3b+c)$. Porém, $(3a+b+2c)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{I}$ e $-2\cdot(a+3b+c) \in \mathbb{Q}$. Logo, se $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4} = 0$, então $(3a+b+2c) = (a+3b+c) = 0$. Assim,

$$\begin{cases} a+2b+6c = 1 \\ 3a+b+2c = 0 \\ a+3b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-2b-6c \\ 5b+16c = 3 \\ b-5c = -1 \end{cases}.$$

Tomando $b = 5c-1$ na segunda equação do último sistema acima, obtém-se $5(5c-1)+16c = 3$, ou seja, $c = \dfrac{8}{41}$. Logo, $b = -\dfrac{1}{41}$ e $a = -\dfrac{5}{41}$.

Desta forma, o vestibulando encontrará o valor pedido no problema. Porém, dependendo da expressão que se tenha no denominador da fração apresentada, sobretudo no índice da raiz, pode-se ter uma complexidade no sistema de equações lineares obtido. Veja, por exemplo, o seguinte.

Problema 2.2. (Olimpíadas Matemáticas de Moscou - 1982) Simplifique a expressão:

$$L = \frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}.$$

2.2 Números algébricos e racionalização

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Dizemos que α é algébrico se existirem inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ tais que

$$a_n\alpha^n + \ldots + a_i\alpha + a_0 = 0.$$

Note que podem existir muitas expressões polinomiais desse tipo, assim, convencionou-se escolher aquela de menor grau possível e dividir tudo por a_n e encontrar uma expressão polinomial racional. Denominamos $\mathbb{Q}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais. Um polinômio cujo coeficiente líder é 1 é chamado mônico.

Definição 2.3. *Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é dito algébrico quando existe $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de modo que $f(\alpha) = 0$.*

Definição 2.4. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico e $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$. Se $f(x)$ é o polinômio mônico de menor grau possível tal que $f(\alpha) = 0$, $f(x)$ é dito polinômio mínimo de α.*
Se α é um número algébrico chamamos uma racionalização de $\frac{1}{\alpha}$ uma expressão do tipo

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Observamos que a nossa nomenclatura de racionalização está em consonância com a definição histórica e é baseada na importância histórica associada às boas aproximações. Observamos ainda que se $\alpha \neq 0$, então o polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de α tem termo independente não nulo. Do contrário, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = x\cdot(a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1})$. O que implicaria dizer que $\alpha \neq 0$ é raiz de $a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1}$, contradizendo o fato de $f(x)$ ser mínimo.

Teorema 2.5. *Se $\alpha \in \mathbb{R}^*$ é um número algébrico, então a expressão $\frac{1}{\alpha}$ pode ser racionalizada, isto é, existem números inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ tais que*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Demonstração: Note que se $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = 0$ então $a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = -a_0$, isto é, $\dfrac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n}{-a_0} = 1$. Desta forma, $\dfrac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n}{-a_0} = \dfrac{f(0) - f(\alpha)}{a_0\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. A essa simplificação chamamos racionalização. Ou seja, uma vez que se tenha o polinômio mínimo de α obtém-se α^{-1}. $\square$

Assim, acabamos de provar o Teorema que nos serve também como definição de racionalização. Vejamos o que ocorre nos casos seguintes.

Exemplo 2.6. Vamos racionalizar $\frac{1}{\alpha}$ com $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Se $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, então $\alpha^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$, isto é, $\alpha^2 = 10 + 2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$ logo, $\alpha^2 - 10 = 2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$. Elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade, tem-se

$$(\alpha^2-10)^2 = 4\cdot(6+10+15+2\sqrt{60}+2\sqrt{90}+2\sqrt{150}) \Rightarrow (\alpha^2-10)^2 = 248\sqrt{30}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

Como $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, então $(\alpha^2-10)^2 = 124 + 8\sqrt{30}\alpha$, ou seja, $\alpha^4 - 20\alpha^2 - 8\sqrt{30}\alpha - 24 = 0$. Obtendo assim

$$\frac{\alpha^3 - 20\alpha - 4\sqrt{30}}{24} = \frac{1}{\alpha}.$$

Note ainda que se quisermos usar a ideia do teorema, sendo $(\alpha^2-10)^2 = 124+8\sqrt{30}\alpha$, então $[(\alpha^2-10)^2 - 124]^2 = 1920\alpha^2$, ou seja, $\alpha^8 + 400\alpha^4 + 576 - 40\alpha^6 - 48\alpha^4 + 960\alpha^2 = 1920\alpha^2$. Assim, $\alpha^8 - 40\alpha^6 + 352\alpha^4 - 960\alpha^2 + 576 = 0$. Em outras palavras

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{\alpha^7 - 40\alpha^5 + 352\alpha^3 - 960\alpha}{576}.$$

Exemplo 2.7. (Voltamos ao Problema 2.1) Seja $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Encontre α^{-1} de modo que não haja raiz não exata no denominador de uma fração.

Sendo $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, então $(\alpha-1)^3 = [\sqrt[3]{2}\cdot(3+\sqrt[3]{2})]^3$. Desenvolvendo esta última igualdade, tem-se $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 2(29 + 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4})$, ou seja, $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$. Substituindo $\alpha - 1 = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ na última igualdade se tem $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(\alpha - 1)$, isto é, $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 15\alpha = 41$. O que assegura que α é raiz de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15x - 41$.

Assim,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 15}{41} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}.$$

Observação 2.8. Observamos que em geral, dado um número algébrico não é facil obter o seu polinômio mínimo. Nem sempre os truques com radicais são eficientes.

Na próxima seção trabalharemos com o caso de números algébricos que podem ser escritos polinomialmente em termos de um outro cujo polinômio mínimo é conhecido. Este é o caso na maioria das aplicações. Observamos também que nem todos os números algébricos podem ser descritos por meio das operações algébricas elementares, isto é, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes de qualquer ordem. Isso se deve ao fato que não existem fórmulas fechadas usando radicais para resolver as equações de grau maior ou igual a 5. Esse importante resultado foi primeiramente provado por Abel e é conhecido com Teorema de Abel-Rufinni. Usando a Teoria de Galois é possível encontrar equações explícitas com coeficientes inteiros, de grau maior ou igual a 5 cujas raízes não são descritas por meio de radicais. O leitor que deseje se aprofundar no tema pode consultar [2] e suas referências.

3 Aritmética com polinômios e o teorema principal

3.1 Aritmética com polinômios

As propriedades aritméticas dos polinômios são válidas em qualquer corpo $\mathbb{K}$, por exemplo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Chamamos $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$, esse conjunto é um domínio.

Definição 3.1 (Divisibilidade de polinômios)**.** *Dados dois polinômios f e $g \in \mathbb{K}[x]$, ambos não nulos e não constantes, diz-se que f divide g (indicando por $f|g$) quando existe um polinômio $h \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $g = f \cdot h$. Neste caso, f é dito divisor de g ou ainda, que g é múltiplo de f.*

Os dois resultados seguintes são generalizações naturais da aritmética dos inteiros, suas provas podem seguir as originais, como em [3] ou o leitor pode consultar [5].

Proposição 3.2. *Sejam f, g e h em $\mathbb{K}[x]$ ambos não nulos e não constantes. Tem-se que:*
i) $f|f$ e $f|0$;
ii) Se $f|g$ e $g|h$, então $f|h$;
iii) Se $f|g$ e $f|h$, então $f|(g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h})$ para todo $\tilde{g}$, $\tilde{h} \in \mathbb{K}[x]$.

Teorema 3.3. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x]$, com $g \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $f = g \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial g$.*

Definição 3.4. *Dados dois polinômios $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Um polinômio mônico d em $\mathbb{K}[x] - \{0\}$ é chamado de máximo divisor comum (mdc) de f e g, quando:*

(i) d é divisor comum de f e de g;

(ii) Se $\tilde{d} \in \mathbb{K}[x]$ - $\{0\}$ é tal que $\tilde{d}|f$ e $\tilde{d}|g$, então $\tilde{d}|d$.

Denotamos o mdc(f, g) por (f, g). Ele é o polinômio mônico de maior grau que divide f e g.

Teorema 3.5 (Algoritmo de Euclides)**.** *Sejam* $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$*, com* $\partial(f) > \partial(g)$*. Existe um algoritmo para obter o* (f, g) *através de certo número finito de divisões euclidianas.*

Demonstração: Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_{-1} = f$, $r_0 = g$ e $r_1 = r$. Efetuando as divisões sucessivas de r_i por r_{i+1} onde $i = -1, 0, 1, ..., n$ (onde n é a passagem onde ocorre pela primeira vez o resto zero).

$$r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}.$$

Note que este processo se encerra num determinado número de divisões uma vez que $\partial(r_i) > \partial(r_{i+1})$. Portanto, $r_{n+1} = 0$ para algum n e $r_{n-1} = r_n \cdot q_n$.

Como $r_i = r_{i+1}q_{i+1} + r_{i+2}$, temos que $(r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2})$, pois todo divisor de r_i e r_{i+1} é divisor de r_{i+2} e reciprocamente, todo divisor de r_{i+1} e r_{i+2} é também divisor de r_i. Então

$$(f, g) = (r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2}) = ... = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

□

Corolário 3.6 (Lema de Bézout para polinômios)**.** *Sejam* $d, f, g \in \mathbb{K}[x]$*, de modo que* $d = (f, g)$*, então existem* $h, \tilde{h} \in \mathbb{Q}[x]$ *tais que*

$$f \cdot h + g \cdot \tilde{h} = d.$$

Demonstração: Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_0 = f$, $r_1 = g$ e $r_2 = r$. Suponha que $\partial f > \partial g$. O algoritmo de Euclides pode ser escrito do seguinte modo: divida r_0 por r_1 obtendo assim $r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$ e os coloque no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c}
 & q_1 & \\ \hline
r_0 & r_1 & \\ \hline
 & r_2 &
\end{array}$$

Na segunda etapa, divida r_1 por r_2, obtendo $r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$ e os coloque na coluna da direita do diagrama acima, construindo a formação a seguir: Note que $r_2 = r_0 + (-q_1) \cdot r_1$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & q_1 & q_2 & \\ \hline
r_0 & r_1 & r_2 & \\ \hline
 & r_2 & r_3 &
\end{array}$$

e $r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot r_2$, ou seja, $r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot (r_0 - q_1 \cdot r_1) = (-q_2) \cdot r_0 + (1 + q_2 \cdot q_1) \cdot r_1$.

Continuando o processo de divisões sucessivas, obtém-se, na i-ésima primeira divisão, a seguinte disposição:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & q_1 & \dots & & q_i & \\
\hline
r_0 & r_1 & \dots & r_{i-1} & r_i & \\
\hline
 & r_2 & \dots & & r_{i+1} &
\end{array}\quad , \qquad \text{onde} \left\{\begin{array}{c}
r_i = r_{i-2} - q_{i-1}r_{i-1} \\
r_{i-1} = r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2} \\
\dots \\
r_3 = r_1 - q_2 r_2 \\
r_2 = r_0 - q_1 r_1
\end{array}\right. .$$

Substituindo r_{i-1} por $r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}$ na primeira equação, tem-se

$$r_i = r_{i-2} - q_{i-1}(r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}),$$

isto é, $r_i = (-q_{i-1})r_{i-3} + (1 + q_{i-2})r_{i-2}$. Fazendo $t_1 = -q_{i-1}$ e $\tilde{t}_1 = 1 + q_{i-2}$, obtém-se

$$r_i = t_1 r_{i-3} + \tilde{t}_1 r_{i-2}. \tag{3.1}$$

Agora faça $r_{i-2} = r_{i-4} - q_{i-3}r_{i-3}$ em (3.1) e encontre $r_i = t_1 r_{i-4} + (\tilde{t}_1 - t_1 q_{i-3})r_{i-3}$. Seja $t_1 = t_2$ e $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 - t_1 q_{i-3}$. Assim, $r_i = t_2 \cdot r_{i-4} + \tilde{t}_2 r_{i-3}$. Continue o processo e obterá t e $\tilde{t}$ tais que $r_i = t \cdot r_0 + \tilde{t} \cdot r_1$. Suponha que as substituições possíveis de serem efetuadas no sistema acima forneçam h_i, h_{i-1}, $\tilde{h}_i$, $\tilde{h}_{i-1}$ de modo que

$$\left\{\begin{array}{r}
r_{i-1} = h_{i-1} \cdot r_0 + \tilde{h}_{i-1} \cdot r_1, \\
r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_1,
\end{array}\right.$$

sendo $r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i$, então $r_{i+1} = (h_{i-1}r_0 + \tilde{h}_{i-1}r_1) + (h_i r_0 + \tilde{h}_i r_i)(-q_i)$, acarreta em $r_{i+1}(h_{i-1} - q_i h_i)r_0 + (\tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i)r_i$, onde $h_{i+1} = h_{i-1} - q_i h_i$ e $\tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i$. $\square$

Ainda analisando o esquema do algoritmo estendido em que $r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}$, suponha que $r_{i+2} = 0$. Pelo exposto anteriormente, $r_{i+1} = mdc(r_0, r_1)$.

Pode-se dispor na seguinte formação tabelar, o algoritmo para obter o valor r_i seguindo as seguintes etapas:

1. Preenche-se nas duas primeiras linhas, os valores que permitam obter as combinações r_0 e r_1;

2. Coloca-se na primeira coluna, a partir da segunda linha, os inversos aditivos dos polinômios quocientes, ou seja, $-q_1$, $-q_2$, ...,$-q_i$;

3. Para obter h_i, com $i \geq 1$, faz-se $h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$;

4. Para obter $\tilde{h}_i$, faz-se $\tilde{h}_{i-2} - q_{i-1} \cdot \tilde{h}_{i-1}$;
5. Na última coluna e na mesma linha que está localizado h_i e $\tilde{h}_i$, coloca-se r_i.

$-q_i$	h_i	$\tilde{h}_i$	$r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_i$
	$h_{-2} = 1$	$\tilde{h}_{-2} = 0$	r_0
$-q_1$	$h_{-1} = 0$	$\tilde{h}_{-1} = 1$	r_1
$-q_2$	$h_2 = h_0 - q_1 \cdot h_1$	$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 - q_1\tilde{h}_1$	r_2
$-q_3$	$h_3 = h_1 - q_2 \cdot h_2$	$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 - q_2\tilde{h}_2$	r_3
...	...	...	...
$-q_{i-1}$	$h_{i-1} = h_{i-3} - q_{i-2} \cdot h_{i-2}$	$\tilde{h}_{i-1} = \tilde{h}_{i-3} - q_{i-2}\tilde{h}_{i-2}$	r_{i-1}
$-q_i$	$h_i = h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$	$\tilde{h}_i = \tilde{h}_{i-2} - q_{i-1}\tilde{h}_{i-1}$	r_i
$-q_{i+1}$	$h_{i+1} = h_{i-1} - q_i \cdot h_i$	$\tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i\tilde{h}_i$	$r_{i+1} = d = (r_0, r_1)$

Veja o processo descrito no seguinte caso.

Exemplo 3.7. Calcular o *m.d.c.* de $2x^3 - 8$ e $4x^2 - 16$. Em seguida, escreva-o como combinação desses polinômios.

Solução: Calculando o *m.d.c.* dos polinômios:

	$\dfrac{x}{4}$	$x + 2$	
$x^3 - 8$	$4x^2 - 16$	$4x - 8$	
	$4x - 8$	0	

Isto é, 4x − 8 é o polinômio mônico em $\mathbb{Q}$ que representa o m.d.c. Obtendo a combinação:

$-q$	h	$\tilde{h}$	$(x^3 - 8) \cdot h + (4x^2 - 16) \cdot \tilde{h}$
	1	0	$x^3 - 8$
$-\dfrac{x}{4}$	0	1	$4x^2 - 16$
$-x - 2$	1	$-\dfrac{x}{4}$	$4x - 8$

Logo, $(x^3-8)\cdot 1+(4x^2-16)\cdot(-\dfrac{x}{4}) = 4x-8$, ou seja, $(x^3-8)\cdot\dfrac{1}{4}+(4x^2-16)\cdot(-\dfrac{x}{16}) = x - 2$.

Definição 3.8. *Um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ é dito irredutível sobre $\mathbb{K}$ quando $f(x)$ não for possível escrevê-lo como um produto de dois polinômios sobre $\mathbb{K}$, ambos com grau maior ou igual a 1 (um).*

Proposição 3.9. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrico então polinômio mínimo de α é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Suponhamos, por absurdo, que $f(x)$ seja redutível em $\mathbb{Q}[x]$. Neste caso, existem $q, q_1 \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot q_1(x)$. Como, por hipótese, $f(\alpha) = 0$, temos então que $f(\alpha) = q(\alpha) \cdot q_1(\alpha) = 0$. Desta forma, temos $q(\alpha) = 0$ ou $q_1(\alpha) = 0$. Uma contradição à minimalidade de $f(x)$. Segue que todo polinômio mínimo é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$. □

3.2 O Teorema principal

Conforme mencionado na Observação 2.8, em geral é difícil obter o polinômio mínimo de um número algébrico. Por outro lado, muitas vezes as expressões irracionais no denominador são polinomiais com relação a um número algébrico mais simples. Verifique todos os exemplos anteriores, somente um deles não é desse tipo.

Teorema 3.10. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Seja $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $g(\alpha) \neq 0$, então existem $h, \tilde{h} \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $gh + f\tilde{h} = 1$.*

Demonstração: Inicialmente, tem-se $(f, g) = 1$ uma vez que f irerutível implica $(f, g) = 1$ ou $(f, g) = f$. Agora suponha que $f(x)|g(x)$. Então, existe $d \neq 0$ em $\mathbb{Q}[x]$ tal que $g(x) = f(x) \cdot d(x)$. Como $f(\alpha) = 0$, então $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot d(\alpha) = 0$, uma contradição ao fato de que $g(\alpha) \neq 0$. Logo $(f, g) = 1$ e, pelo Corolário 3.6, existem polinômios h e $\tilde{h}$ em $\mathbb{Q}[x]$ tais que $gh + f\tilde{h} = d = 1$. □

Corolário 3.11. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Q}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de modo que $g(\alpha) \neq 0$, então existe $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de forma que $g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 1$. Equivalentemente temos $h(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$. Pode-se também escolher $h(x)$ de modo que $\partial h(x) < \partial f(x)$.*

Demonstração: Já sabemos que, $gh + f\tilde{h} = 1$, então $g(\alpha)h(\alpha) + f(\alpha)\tilde{h}(\alpha) = 1$. Porém, como $\alpha \in \mathbb{Q}$ é tal que $f(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) \neq 0$, tem-se que $g(\alpha)h(\alpha) = 1$, desta forma $h(\alpha) \neq 0$. Isto é, $h(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$.

Pode-se supor que $\partial h < \partial f$, pois do contrário, pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $h = f \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial g$. Assim, $gh + f\tilde{h} = g(fq + r) + f\tilde{h} = 1$. Logo, $g(\alpha)r(\alpha) = 1$ e $r(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$. □

Corolário 3.12. *Sejam* $t^n = a$ *e* $x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n \neq 0$ *com* $a, x_i \in \mathbb{Q}$ *então existem* $y_i \in \mathbb{Q}$ *tais que* $(x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n)(y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n) = 1$.

Demonstração: Considere $g(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n$ e $f(t) = t^n - a$. Pelo Corolário 3.11, existe $h(t) = y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n$ tal que

$$(x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n)(y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n) = 1.$$

$\square$

Aplicando a mesma técnica no Problema 2.1, temos $f(x) = x^3 - 2$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Calculando o mdc de $f(x)$ e $g(x)$:

	$x - 3$	$\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}$	0
$x^3 - 2$	$x^2 + 3x + 1$	$8x + 1$	$\frac{41}{64}$
	$8x + 1$	$\frac{41}{64}$	$\frac{512}{41}x + \frac{64}{41}$

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$f(x)h(x) + g(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	$x^3 - 2$
$-(x - 3)$	0	1	$x^2 + 3x + 1$
$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)$	1	$-(x - 3)$	$8x + 1$
	$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)$	$\frac{1}{64}(8x^2 - x - 5)$	$\frac{41}{64}$

Ou seja

$$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)(x^3 - 2) + \frac{1}{64}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = \frac{41}{64}.$$

Logo, $-\frac{1}{41}(8x + 23)(x^3 - 2) + \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = 1$. Deste modo, $h(x) = \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5)$ e $h(\sqrt[3]{2}) = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}$.

Assim,

$$\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = -\frac{5}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} + \frac{8\sqrt[3]{4}}{41}.$$

Exemplo 3.13. Obter a racionalização da fração $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}}$.

Solução: Note que $2\sqrt{2}=2\sqrt[4]{4}$, então

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}.$$

O polinômio mínimo de $\sqrt[4]{2}$ é $f(x)=x^4-2$. Deve-se procurar $g(x)$ de modo que $g(\sqrt[4]{2})=1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}\neq 0$, ou seja, $g(x)=1-x+2x^2+x^3$. Calculando o *mdc* de $f(x)$ e $g(x)$.

	$x-2$	$\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}$	$\frac{125}{14}x-\frac{4175}{196}$	
x^4-2	x^3+2x^2-x+1	$5x^2-3x$	$\frac{14}{25}x+1$	$\frac{4175}{196}$
				0

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$g(x)h(x)+f(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	x^4-2
$-(x-2)$	0	1	x^3+2x^2-x+1
$-\left(\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}\right)$	1	$-x+2$	$5x^2-3x$
$-\left(\frac{125}{14}x-\frac{4175}{196}\right)$	$-\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}$	$\frac{x^2}{5}+\frac{3x}{25}-\frac{1}{25}$	$\frac{14}{25}x+1$
		$-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}$	$\frac{4175}{196}$

Desta maneira

$$(x^3+2x^2-x+1)\left(-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}\right)=\frac{4175}{196},$$

isto é,

$$\frac{196}{4175}(x^3+2x^2-x+1)\left(-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}\right)=1.$$

Assim, fazendo $x=\sqrt[4]{2}$ e simplificando,

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{64}}=\frac{1}{167}\left(-14\sqrt[4]{8}+25\sqrt[4]{4}+15\sqrt[4]{2}+9\right).$$

□

Referências

[1] Engel, Arthur. Problem Solving strategies. Springer, 1998.

[2] Gondim, Rodrigo, Maria Eulália de Moraes Melo, and Francesco Russo. Equaçoes Algébricas e a Teoria de Galois. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2013

[3] Hefez, Abramo. Elementos de Aritmética. Coleção: Textos universitários. SBM, 2011.

[4] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. Temas e Problemas Elementares, SBM, 2006.

[5] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios. Vol. 6, SBM, 2012.

[6] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números. Vol. 5, SBM, 2012.

[7] Wagner, Eduardo; Moreira, Carlos Gustavo Tamm de Araujo. 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática. FOTOJAE, 1996.

Submetido em 19 de Junho de 2018.
Aceito em 18 de Setembro de 2018.