

**SOBRE ALGUNS RESULTADOS DE D'ALEMBERT**

Luiz Aduino Medeiros

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

[luizadauto@gmail.com](mailto:luizadauto@gmail.com)

Manuel Milla Miranda

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

[mmillamiranda@gmail.com](mailto:mmillamiranda@gmail.com)

Aldo Trajano Louredo

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

[aldolouredo@gmail.com](mailto:aldolouredo@gmail.com)**Resumo**

Neste artigo de divulgação faremos uma descrição sucinta de alguns resultados matemáticos obtidos por Jean Le Rond D'Alembert, bem como uma pequena resenha biográfica dele.

**Abstract**

In this article we will give a brief description of some mathematical results obtained by Jean Le Rond D'Alembert, as well as a short biographic review of him.

**1 Introdução**

Iniciamos esta seção fazendo um breve resumo sobre a vida de Jean Le Rond D'Alembert.



Foto de D'Alembert pertencente à "École de La Tour", St. Quentin.

As circunstâncias do nascimento de D’Alembert incluem a existência romântica de um amor proibido, na versão de Ronald Grimsley. Ana de Tencin, antes, contra sua vontade, tornou-se freira e então uma “Chanoinesse”, em Paris. Por meio de uma dispensa Papal de 1714, teve oportunidade de exercer atividades de natureza social fora do convento, dando origem a intrigas políticas e ligações amorosas. Participou de uma empresa onde recebia recursos que permitiam sua segurança financeira. Uma de suas uniões “irregulares” foi com um oficial de artilharia de nome Louis-Camus Detouches. Jean Lerond foi o resultado desta aventura amorosa.

Na época do nascimento do bebê, 17 de novembro de 1717, Detouches não se encontrava em Paris porque cumpria missão no exterior. Assim, ansiosa por resolver complicada situação, Mme. de Tencin colocou a criança acabada de nascer, em uma “caixa de madeira” e deixou na escadaria da pequena Igreja Saint-Jean-Lerond. Esta igreja, demolida em 1748, se localizava próxima à Catedral de Notre Dame.

A criança foi rapidamente encontrada e batizada, na Igreja Católica, com o nome Jean Lerond, nome da igreja. Muito frágil, foi encaminhada, como de hábito, a um berçário onde permaneceria em recuperação por seis semanas.

Do berçário foram Mme. Rousseaux e seu esposo, família de artesãos humildes, que assumiram a paternidade e educação de Jean Lerond.

Ao retornar à Paris, Detouches, o pai, se inteirou do acontecido e iniciou a procura para localizar seu filho, o que logo conseguiu. A família Rousseaux tinha poucos recursos. Detouches apoiou financeiramente a educação da criança sob orientação da família Rousseaux. Jean Lerond tinha o casal Rousseaux como seus verdadeiros pais e eles o tinham como filho.

Concluiu o ensino elementar, em escolas particulares, financiado por seu pai. Preocupados com a educação da criança a família Detouches conseguiu matricular Jean Lerond no Colégio Quatro Nações, colégio de nobres. Os Detouches já tinham informações, de professores anteriores, da capacidade intelectual da criança, quando ela tinha aproximadamente oito anos. No momento da inscrição o administrador registrou com o nome Jean Lerond Daremberg. Ele não gostou deste nome e passou a se identificar como Jean Lerond D’Alembert e assim ficou (cf. Grimsley [4]). Completou seus estudos no Quatro Nações em 1735 aos 18 anos e retornou a morar com a família Rousseaux. A história daí em diante é muito rica. O Colégio Quatro Nações para educação de nobres era Jansenista <sup>1</sup>. Entretanto D’Alembert teve influências dos Cartesianos e Jesuítas.

Nota-se que seu pai Detouches ao falecer em 1726 deixou uma boa soma de recursos para D’Alembert o que contribuiu para sua educação no Colégio Jansenista Quatro Nações. Falecendo em 29 de outubro de 1783, sem família, D’Alembert foi para a vala

---

<sup>1</sup> Jansenismo: Corrente filosófica idealizada por Cornelio Jansênio (1585-1638)

comum.

Inicia-se fixando a nomenclatura. Deslocamento virtual é definido como uma mudança da configuração de um sistema, arbitrário, instantâneo, contínuo, infinitesimal, compatível com as condições de vínculo. Tentaremos exemplificar com o caso de pequenas vibrações transversais de uma corda elástica  $[\alpha_0, \beta_0]$ , em repouso no eixo dos  $x$  do sistema cartesiano ortogonal do  $\mathbb{R}^2$ . Suponha num instante  $t > 0$  a vibração ou deformação da corda fixa em  $(\alpha_0, 0)$  e  $(\beta_0, 0)$  assuma a curva  $S$  que se supõe de equação  $y = u(x, t)$ , uma função regular. Posteriormente retornaremos com mais detalhes. A curva  $S$  é regular, o deslocamento virtual sobre  $S$  representa-se por  $\delta s$ . Ele é um deslocamento sobre  $S$ , contínuo de  $S$  presa em  $(\alpha_0, 0)$ ,  $(\beta_0, 0)$ . Estes deslocamentos são introduzidos na tentativa de obter informações sobre o comportamento das forças internas atuando no sistema, no presente exemplo a deformação  $S$  de  $[\alpha_0, \beta_0]$ . Observe que sobre  $S$  define-se o elemento de arco  $ds$  que é definido pela representação analítica de  $S$ . Em geral são feitas hipóteses de derivabilidade sobre a representação analítica de  $S$  permitindo definir  $ds$ .<sup>2</sup>

## 2 Equilíbrio Dinâmico

Considera-se uma massa pontual  $m$  situada no eixo  $x$  de um sistema de coordenadas Cartesianas como mostra a Figura 1.



**Figura 1**

Quando uma força  $F$ , vetor, atua sobre  $m$ , a segunda lei de Newton afirma que a relação entre a força  $F$  e a aceleração  $\gamma$  que ela imprime a  $m$ , sendo  $m$  constante, é

$$F = m \gamma.$$

Note que  $F$  e  $\gamma$  são vetores do plano  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>2</sup>Dedicado ao Professor Plínio Sussekind Rocha - em memória.

Observa-se que a velocidade da massa  $m$  é  $v = \frac{dx}{dt}$ . Denote por  $p = mv$ , sendo  $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$ , obtém-se a notação

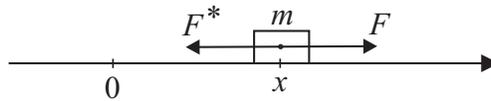
$$F = \overset{\circ}{p}, \quad (2.1)$$

sendo  $\overset{\circ}{p} = \frac{dp}{dt}$ . Esta é a segunda lei de Newton com outra notação.

A seguir será dada a interpretação de D'Alembert para (2.1). Ele supõe que quando  $F$  atua sobre a massa  $m$  ela reage com uma força  $-\overset{\circ}{p}$ , representada por  $F^*$  e denominada inércia da massa  $m$ . Portanto, em cada instante  $t$ , obtém-se o equilíbrio dinâmico:

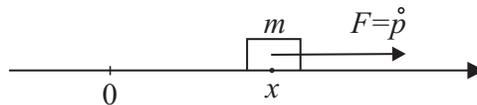
$$F + F^* = 0, \quad (2.2)$$

denominado Princípio de D'Alembert. Repete-se que a soma (2.2) é de vetores. Interpreta-se graficamente do modo seguinte:



**Figura 2**

O princípio diz que em cada instante há o equilíbrio entre a força aplicada  $F$  e a força fictícia de inércia  $F^*$  da partícula de massa  $m$ . A segunda lei de Newton pode ser vista, graficamente por meio da Figura 3:



**Figura 3**

Suponha que a massa  $m$  localizada no ponto  $x$  sofra deformações infinitesimais (convergentes para zero), contínuas mantendo-se sobre o eixo dos  $x$ . Tais deformações são denominadas virtuais ou possíveis (segundo Ernest Mach [3]) e representadas por

$\delta x$ . O trabalho da força  $F + F^*$  correspondente ao deslocamento virtual  $\delta x$  é  $(F + F^*)\delta x$ . Do equilíbrio dinâmico de D'Alembert (2.2) resulta que

$$(F + F^*)\delta x = 0. \quad (2.3)$$

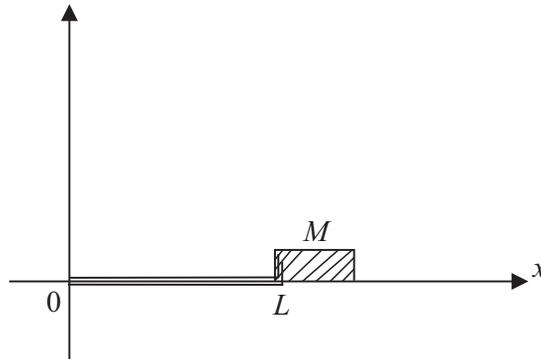
A igualdade (2.3) é denominada princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert para uma partícula de massa  $m$  e coordenada  $x$ . Quando se tem  $n$  partículas de massa  $m_i$  e coordenadas  $x_i$  sobre o eixo  $Ox$ , com forças  $F_i$  e  $F_i^*$  tem-se o equilíbrio dinâmico

$$\sum_{i=1}^n (F_i + F_i^*) = 0.$$

Se  $\delta x_i$  é um deslocamento virtual de  $m_i$ , o princípio dos trabalhos virtuais tem a forma:

$$\sum_{i=1}^n (F_i + F_i^*)\delta x_i = 0. \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.1.** Considere uma barra cilíndrica, de comprimento  $L$ , com um extremo fixo na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e o extremo  $L$  livre, veja a Figura 4.



**Figura 4**

Suponha uma massa  $M$  colada à extremidade  $L$  da barra, pressionando continuamente a barra na direção oposta do eixo  $Ox$ . Como consequência há deformações horizontais da barra e uma tensão interna  $\tau$ . Supõe-se que a relação tensão e deformação média

seja linear, (Lei linear de Hooke). Assim representando por  $u(x, t)$  a deformação horizontal do ponto  $x$  da barra no instante  $t$ , a equação diferencial parcial que modela este problema é a seguinte:

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Note que  $u_t$  e  $u_x$  são derivadas parciais de  $u(x, t)$  em relação a  $t$  e  $x$ , respectivamente.

Para a análise matemática do modelo (2.4), é mister que se conheçam as condições iniciais  $u(x, 0)$  e  $u_t(x, 0)$  bem como as condições de contorno, isto é,  $u(0, t)$  e  $u(L, t)$  para o tempo  $t > 0$ . Supõe-se a barra fixa na origem, isto é,

$$u(0, t) = 0. \quad (2.5)$$

Quanto às condições iniciais, admite-se:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (2.6)$$

sendo  $u_0$  e  $u_1$  funções conhecidas.

Resta conhecer a condição no extremo  $L$  da barra onde pressiona a massa  $M$ , na direção oposta a do eixo  $Ox$ . De fato, pela segunda lei de Newton, devido a pressão no extremo  $L$  tem-se a força de inércia  $F^*$  em  $L$  dada por

$$F^* = -M u_{tt}(L, t).$$

A força da barra em  $L$  é dada pela tensão

$$F = ES u_x(L, t),$$

pela lei de Hooke. Portanto do equilíbrio dinâmico de D'Alembert, obtém-se em  $L$ ,

$$F + F^* = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Resulta a condição de fronteira em  $L$ , isto é:

$$M u_{tt}(L, t) + ES u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.7)$$

□

### 3 Vibrações de Cordas Elásticas

Nesta seção aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais para obter o modelo de D'Alembert para pequenas vibrações verticais de uma corda elástica com extremos fixos.

Considera-se o plano  $\mathbb{R}^2$  com um sistema de coordenadas Cartesianas ortogonais  $xOy$ . Suponha uma corda  $[\alpha_0, \beta_0]$  em posição de repouso no eixo  $Ox$  e  $S$  uma pequena deformação vertical de  $[\alpha_0, \beta_0]$  no instante  $t$ . Ver Figura 5.

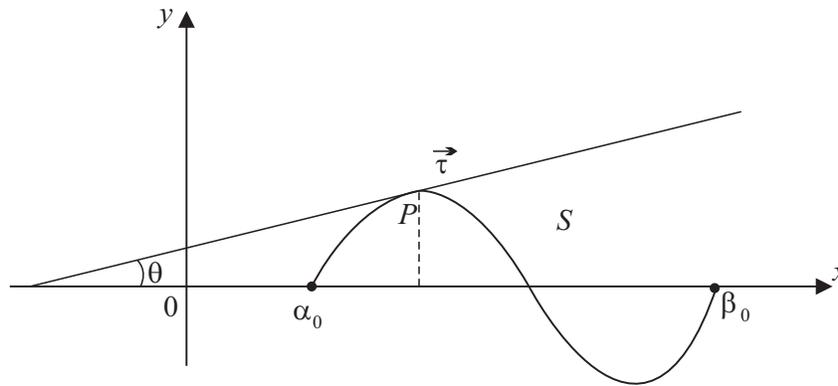


Figura 5

Suponha que a única força atuando na corda  $[\alpha_0, \beta_0]$  seja a tensão  $\vec{\tau}$ . Note que em cada ponto  $P$  de  $S$  a tensão possui a direção da tangente a  $S$  no ponto  $P$ . Supõe-se, também, que  $y = u(x, t)$  seja a representação analítica de  $S$ ,  $\alpha_0 \leq x \leq \beta_0$ ,  $t \geq 0$ . Supõe-se esta função duas vezes continuamente derivável relativamente a  $x \in (\alpha_0, \beta_0)$  e  $t \geq 0$ . Considera-se pequenas deformações verticais, isto é,  $|u_x(x, t)| \ll 1$  em  $[\alpha_0, \beta_0]$  e  $t > 0$ . Usa-se a notação  $u_x$ ,  $u_t$  para  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Represente por  $\tau$  o módulo do vetor  $\vec{\tau}$ . Assim, as componentes de  $\vec{\tau}$  são:

$$\tau \sin \theta \text{ (vertical) e } \tau \cos \theta \text{ (horizontal).}$$

Da hipótese de pequenez sobre as deformações verticais, a componente horizontal é pequena e nós consideramos somente a componente vertical  $\tau \sin \theta$ . Logo, a única força atuando na corda é a variação da componente vertical, isto é,

$$F = \frac{\partial}{\partial x} (\tau \sin \theta), \tag{3.1}$$

onde  $F$  é o módulo de  $\vec{F}$ .

Suponha  $\delta s$  um deslocamento virtual sobre  $S$ . Assim o trabalho virtual de  $F(x, t) + F^*(x, t) = F(x, t) - \overset{\circ}{p}$ , correspondendo a  $\delta s$ , é

$$[F(x, t) - \overset{\circ}{p}] \delta s = 0,$$

pelo princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert. O trabalho virtual ao longo de  $S$  é a integral sobre  $S$ , isto é:

$$\int_S \left\{ [F(x, t) - \overset{\circ}{p}] \delta s \right\} ds = 0, \quad (3.2)$$

para todo deslocamento virtual  $\delta s$  sobre  $S$ . Note que  $\delta s$  é  $\delta s(x, t)$ . Sendo  $\delta s(x, t)$  uma função contínua de  $x$  conclui-se de (3.2) que

$$F(x, t) - \overset{\circ}{p}(x, t) = 0, \text{ para } \alpha_0 \leq x \leq \beta_0, \ t > 0. \quad (3.3)$$

Sendo

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} (\tau \operatorname{sen} \theta) = \tau \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \theta \\ &\approx \tau \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} \theta \approx \tau \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Então

$$F(x, t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

tem-se, também:

$$\overset{\circ}{p}(x, t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5) resulta:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.6)$$

Este é o modelo matemático para pequenas vibrações verticais de uma corda elástica presa nos extremos. Ele foi obtido em 1741 por D'Alembert. Pode-se afirmar que esta foi a primeira equação diferencial parcial modelando um fenômeno da Física Matemática.

Note que D'Alembert estava interessado na modelagem matemática da propagação do som em cordas de instrumentos musicais. (Ver por exemplo, o trabalho de D'Alembert [2]).

### 3.1 Solução de D'Alembert para (3.6)

Faça  $\frac{\tau}{m} = 1$ , para tornar simples o cálculo. Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ para } 0 < x < +\infty, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

com  $u = u(x, t)$  duas vezes continuamente derivável em relação a  $x$  e  $t$ . D'Alembert empregou um processo imaginativo para encontrar uma função  $u(x, t)$  solução pontual para (3.7). De fato, consideremos a forma diferencial  $du$ :

$$du = q dt + p dx,$$

com

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Agora, seja  $w$  a forma diferencial dada por

$$w = p dt + q dx,$$

com  $p = \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $q = \frac{\partial u}{\partial t}$ , para  $u(x, t)$  solução da equação de D'Alembert (3.7), isto é,  $u$  satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

que implica

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Esta igualdade diz que a forma diferencial  $w$  é exata. Então,  $w$  é a diferencial de uma função  $v(x, t)$  e temos:

$$dv = p dt + q dx.$$

Assim obtemos:

$$\begin{cases} d(u + v) = (p + q)d(x + t), \\ d(u - v) = (p - q)d(x - t). \end{cases}$$

Então, D'Alembert obtém:

$$\begin{cases} u + v = \phi(x + t), \\ u - v = \psi(x - t), \end{cases}$$

com, segundo ele,  $\phi$  e  $\psi$  são funções reais arbitrárias.

Conseqüentemente, ele obteve a solução  $u(x, t)$  definida por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + t) + \psi(x - t)],$$

com  $\phi, \psi$  funções arbitrárias. Esta função é denominada solução de D'Alembert da equação (3.6).  $\square$

## 4 Contribuições de D'Alembert ao Ensino Médio e Universitário

No presente parágrafo serão lembradas algumas contribuições de D'Alembert que fazem parte do currículo de ensino da Matemática Pré-Universitária.

- Inicia-se com o Teorema Fundamental da Álgebra. Representa-se por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ . Com  $P(z)$  denota-se o polinômio  $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z, a_0, a_1, \dots, a_n$  números complexos. Habitualmente, denomina-se Teorema Fundamental da Álgebra o resultado afirmando que a equação algébrica

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

possui uma solução  $\zeta \in \mathbb{C}$ , isto é,

$$P(\zeta) = 0.$$

Note que  $z, a_0, a_1, \dots, a_n$  são números complexos. Este resultado foi demonstrado, pela primeira vez, por D'Alembert em 1746. Sua demonstração, publicada em "Histoire de l'Académie Royal des Sciences de Berlin, 1746", p. 182-191", estava incorreta. Uma demonstração correta foi apresentada por Gauss em 1799. Por esta razão o Teorema Fundamental da Álgebra aparece como Teorema de D'Alembert-Gauss. A demonstração deste teorema, nos dias de hoje, é consequência do Teorema de Liouville. Aliás bem simples, como será visto a seguir. Representa-se por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. Diz-se que uma função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$ , quando  $f$  for continuamente derivável em  $\mathbb{C}$ . O teorema de Liouville afirma que se  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  for holomorfa e limitada em  $\mathbb{C}$  então  $f$  é constante em  $\mathbb{C}$ . Admitindo demonstrado o Teorema de Liouville, será provado o Teorema de D'Alembert-Gauss. Considere um polinômio

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n,$$

pelo menos um coeficiente  $a_i$  diferente de zero. Para fixar idéia suponha  $a_0 \neq 0$ . O teorema de D'Alembert-Gauss afirma que a equação

$$P(z) = 0, \quad (a_0 \neq 0)$$

possui uma raiz em  $\mathbb{C}$ . De fato, suponha  $P(z) \neq 0$  em  $\mathbb{C}$ . Resulta que a função

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

é holomorfa em  $\mathbb{C}$ . Provaremos que  $f$  é limitada em  $\mathbb{C}$ . De fato, escreve-se;

$$P(z) = z^n \left[ a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right],$$

de onde resulta:

$$|P(z)| \geq |z|^n \left[ |a_0| - \frac{|a_1|}{|z|} - \frac{|a_2|}{|z|^2} - \dots - \frac{|a_n|}{|z|^n} \right].$$

Seja  $r > 0$  tal que

$$\frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_2|}{|z|^2} + \dots + \frac{|a_n|}{|z|^n} < \frac{|a_0|}{2}$$

para  $|z| > r > 0$ . Por cálculo simples, resulta:

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2} |a_0| r^n, \quad \text{para } |z| > r.$$

Daí

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_0| r^n},$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , tal que  $|z| > r$ , provando que  $f$  é limitada no exterior do disco  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$ , isto é, em  $\mathbb{C}$ . Note que  $|f(z)|$  é limitada no disco fechado. Assim,  $f$  é holomorfa e limitada em  $\mathbb{C}$ , portanto, pelo Teorema de Liouville,  $f$  é constante em  $\mathbb{C}$ . Sendo  $a_0 \neq 0$ ,  $P(z) = a_0 z^n$  não é constante. Há assim, uma contradição, concluindo-se que  $P(z) = 0$  possui solução em  $\mathbb{C}$ , provando o Teorema de D'Alembert-Gauss.

- No estudo das séries de números reais  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é conhecido o critério de Cauchy (1821) para o caso  $a_n > 0$ ,  $n = 1, \dots$ , afirmando que se para  $n \geq n_0$ , se tem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a < 1 \quad \text{a série converge}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{a série diverge}$$

Note-se que este critério havia sido estabelecido por Daniel Bernoulli (1743-1771) e D'Alembert com demonstração incorreta.

- No ensino elementar das equações diferenciais ordinárias, isto é, equações do tipo  $y' = f(x, y)$ ,  $y' = \frac{dy}{dx} = p$ , costuma-se particularizar a função  $f$  para obter modelos que são integráveis, encontrando, por meio de cálculos, a solução explícita da equação. Há um modelo de Giacomo Bernoulli (1695) e D'Alembert (1748). Consulte-se F. Severi-G.S. Draconi – Lezioni di Analisi, Volume Terzo, p.34. Cesare Zuffi Editores, Bologna, Italia, 1951.

□

## 5 Solução fraca para equação de D'Alembert

Representa-se por  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  o espaço vetorial das funções reais em  $\mathbb{R}^2$ , infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}^2$ , cada função nula no exterior de um compacto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $K$  variando com a função. Denota-se por  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  o espaço das funções numéricas em  $\mathbb{R}^2$ , integráveis em cada compacto de  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Diz-se, segundo Sobolev, que  $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  possui derivada parcial fraca relativamente a  $x$  quando existe  $h \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt = - \int_{\mathbb{R}^2} h \phi dx dt,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

A função  $h$  é denominada derivada fraca de  $u$  em relação a  $x$ , representando-se por  $h = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Escreve-se a igualdade acima:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \phi dx dt.$$

Mutatis mutandis, define-se as derivadas fracas  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Consequentemente, o D'Alembertiano fraco é definido por:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\square u) \phi dx dt = 0,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , onde  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Integrando por partes a integral anterior deduz-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \square \phi dx dt = 0,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Assim, define-se solução fraca da equação de D'Alembert como sendo a função  $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ , satisfazendo a igualdade integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \square \phi dxdt = 0,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Mostra-se que a solução de D'Alembert dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + t) + \psi(x - t)]$$

com  $\phi, \psi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  é solução fraca da equação de D'Alembert  $\square u = 0$ . Com efeito, seja  $(\rho_\nu)$  uma sucessão regularizante de  $\mathbb{R}^2$ . Define-se a convolução de  $\phi$  com  $\rho_\nu$ , denotada por  $\phi * \rho_\nu$ , como sendo

$$(\phi * \rho_\nu)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, t) \rho_\nu(x - y, t - s) dy ds.$$

Cada função  $\phi * \rho_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e existe uma subsucessão de  $(\phi * \rho_\nu)$ , ainda denotada por  $(\phi * \rho_\nu)$ , tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\phi * \rho_\nu)(x, t) = \phi(x, t)$$

para quase todo  $(x, t) \in K$ ,  $K$  compacto de  $\mathbb{R}^2$ . Tem-se o análogo resultado para  $(\psi * \rho_\nu)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [(\phi * \rho_\nu)(x + t) + (\psi * \rho_\nu)(x - t)] \square \varphi(x, t) dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [\square(\phi * \rho_\nu)(x + t) + \square(\psi * \rho_\nu)(x - t)] \varphi(x, t) dxdt \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Notando que  $\varphi$  anula-se no exterior de um compacto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , usando a última convergência e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [\phi(x + t) + \psi(x - t)] \square \varphi(x, t) dxdt = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) dxdt = 0,$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Assim a solução  $u(x, t)$  determinada por D'Alembert é solução fraca da equação (2.4).  $\square$

## Referências

- [1] Joseph Bertrand, *D'Alembert*, Librairie Hachette et Cia., Paris 1889.
- [2] Jean Le Rond D'Alembert, *Recherche sur les vibrations des cordes sonores (p.1-64) puis: supplément au mémoire précédent sur les cordes vibrantes*, Opuscules Mathématiques, tome 1, pp. 65-73 Paris, 1761.
- [3] Ernest Mach, *Desarrollo Histórico-Crítico de la Mecánica*, Epasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1949.
- [4] Ronald Grimsley, *Jean D'Alembert, 1717-1783*, Claredon Press, Oxford 1963.
- [5] Michel Paty, *D'Alembert*, Les Belles Lettres, Paris 1998.

**Submetido em 10 de Julho de 2018.**  
**Aceito em 19 de Setembro de 2018.**