REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v4i1.9823

IDENTIDADES TRIBONACCI

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal do Ceará - IFCE
re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal do Ceará - IFCE
fregis@gmx.fr

Resumo

O presente artigo realiza um estudo da sequência de Tribonacci, baseado no mesmo procedimento realizado para a recorrência da Sequência de Fibonacci. Assim, foram estudadas algumas propriedades dos números inteiros positivos, dentre elas a soma dos termos da Sequência de Tribonacci, bem como o comportamento dos termos desses números para índices negativos.
Palavras-chave: Índices negativos. Índices positivos. Sequência Generalizada de Tribonacci.

Abstract

The present paper makes a study of the sequence of Tribonacci, based on the same procedure for as the Fibonacci Sequence recurrence. Thus, we have studied some properties of the positive integers, among them the sum of the terms of the Generalized Tribonacci Sequence, as well as the behavior of the terms of these numbers for negative indices.
Keywords: Negative indices. Positive indices. Generalized Tribonacci equation.

1 Introdução

É de provável conhecimento do leitor a história envolvendo a reprodução de pares de coelhos, concebida pelo italiano Leonardo Pisano (1170-1250), publicada em seu livro *Liber Abaci* em 1202. Cabe observar que, originalmente, uma série de variáveis são desconsideradas como, por exemplo, o período de reprodução dos pares de coelhos ao longo de um mês, ou ainda a variável morte pode ser agregada ao processo de modelização [10]. A evolução desta sequência teve início com o trabalho [4]. De acordo com [1] existe um interesse ingênuo em enfatizar as propriedades básicas desta sequência, estudando assim estes números, a fim de obter essas novas identidades.

A Sequência de Fibonacci tem este nome obtido da abreviação de "filho de Bonaccio", como Leonardo era chamado. Matematicamente, esta sequência ficou conhecida a partir da seguinte relação de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, onde $f_0 = 1, f_1 = 1$.

2 Preliminares

A partir do procedimento de recorrência, e baseado em estudos no trabalho de [8] vamos apresentar a seguinte definição.

Definição 2.1 ([9]). *Chamaremos de sequência de Tribonacci, a seguinte relação de recorrência $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$, $n \geq 3$. Cujos valores iniciais são dados por $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1$.*

Outra sequência de Tribonacci foi definida por [6] determinada pela mesma relação de recorrência, porém com outros valores de entrada, sendo eles: $t_0 = t_1 = 0, t_2 = 1$. Neste trabalho será considerado os valores descritos na Definição 2.1. Pode-se verificar que a partir da Definição 2.1 que a seguinte lista de elementos é determinada: $(0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, ...)$. A definição anterior descreve a sequência de Tribonacci que, de modo análogo ao caso da sequência de Fibonacci, dependerá dos três elementos antecessores. Mas, podemos observar um processo de extensão para índices inteiros, posto que, na definição anterior, seus valores são indicados para índices $n \geq 3$. Vejamos que podemos estender a sequência para todos os índices inteiros da seguinte maneira: para $n = 2, t_2 = t_1 + t_0 + t_{-1}$ e, assim, teremos o valor $t_{-1} = 0$. De modo similar, vemos que para $n = 1, t_1 = t_0 + t_{-1} + t_{-2}$ e, vemos que $t_{-2} = 1$. Para o índice menor $n = 0, t_0 = t_{-1} + t_{-2} + t_{-3}$, vemos que $t_{-3} = -1$. De modo recorrente, podemos determinar ainda que $t_{-4} = 0, t_{-5} = 2, t_{-6} = -3, t_{-7} = 1, t_{-8} = 4, t_{-9} = -8, t_{-10} = 5, t_{-11} = 7, t_{-12} = -20$, etc.

Assinalamos que, a partir dos valores anteriores, poderemos sistematizar a descrição do seguinte conjuntos, com índices inteiros, da seguinte forma:

$$(..., t_{-n-2}, t_{-n-1}, t_{-n}, t_{-n+1}, t_{-n+2}, ..., t_{-4}, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, ...t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n, ...)$$

Podemos observar agora que, quando desejamos determinar um elemento qualquer, para $n \geq 3$, empregamos a relação $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$, todavia os elementos $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1$ são fixados preliminarmente. Agora, observando que $t_{-1} = t_2 - t_1 - t_0$ ou ainda que $t_{-2} = t_1 - t_0 - t_{-1}$ e, também que $t_{-3} = t_0 - t_{-1} - t_{-2}$. Tais disposições estimulam um entendimento do último conjunto numa ordem ou sentido diferente. Enquanto que, no primeiro caso, o desenvolvimento nos estimula a considerar um "movimento"da esquerda para direita, no caso de relações do tipo $t_{-4} = t_{-1} - t_{-2} - t_{-3}$ o desenvolvimento, agora, nos estimula a considerar uma espécie de "movimento"da direita para esquerda, indicada por $t_{-n-1} = t_{-n+2} - t_{-n+1} - t_{-n}$ ou $t_{-n-2} = t_{-n+1} - t_{-n} - t_{-n-1}$.

A partir da Sequência de Tribonacci, usaremos as seguintes notações.

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_{n-1} + t_n = \sum_{i=0}^{n} t_i,$$

$$S_{(2n)} = t_{2.0} + t_{2.1} + t_{2.2} + ... + t_{2n-2} + t_{2n} = \sum_{i=0}^{n} t_{2i},$$

$$S_{(2n+1)} = t_{(2.0)+1} + t_{(2.1)+1} + t_{(2.2)+1} + ... + t_{2n-1} + t_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} t_{2i+1},$$

$$S_{-n} = t_0 + t_{-1} + t_{-2} + ... + t_{-n-1} + t_{-n} = \sum_{i=0}^{n} t_{-i},$$

$$S_{(-2n)} = t_{-2.0} + t_{-2.1} + t_{-2.2} + ... + t_{-2n-2} + t_{-2n} = \sum_{i=0}^{n} t_{-2i},$$

$$S_{(-2n-1)} = t_{(-2.1)-1} + t_{(-2.1)-1} + t_{(-2.2)-1} + ... + t_{-2n-1} = \sum_{i=0}^{n} t_{-2i-1}.$$

Podemos facilmente ver que $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 2$.

3 Algumas Identidades da Sequência de Tribonacci

Visando aprofundar o conteúdo de Sequência de Tribonacci, eis que são verificadas algumas identidades à respeito destes números.

Teorema 3.1. *Para qualquer inteiro $n \geq 2$ verificam-se as seguintes identidades:*

(i) $S_n + S_{(n-1)} = t_{n+2} - 1$*;*

(ii) $S_{(2n)} + S_{(2n-2)} = t_{2n+1} - 1$*;*

(iii) $t_{2n+2} = S_{(2n+1)} + t_{2n-1} - 1$;

(iv) $S_n = 1 + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$.

Demonstração. A relação de recorrência da Definição 2.1 fornece as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
t_3 - t_2 &= t_1 + t_0, \\
t_4 - t_3 &= t_2 + t_1, \\
t_5 - t_4 &= t_3 + t_2, \\
&\vdots \\
t_n - t_{n-1} &= t_{n-2} + t_{n-3}, \\
t_{n+1} - t_n &= t_{n-1} + t_{n-2}, \\
t_{n+2} - t_{n+1} &= t_n + t_{n-1}.
\end{aligned}$$

E assim, somando-as nas equações acima, obtemos a seguinte soma:

$$t_{n+2} - t_2 = \sum_{i=0}^{n} t_i + \sum_{i=0}^{n-1} t_i.$$

Lembrando que $t_0 = 0$ e $t_2 = 1$, temos que

$$S_n + S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} t_i + \sum_{i=0}^{n-1} t_i = t_{n+2} - 1.$$

Logo, vale o item (i).

No mesmo sistema, podemos reorganizar os termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
t_3 - t_1 &= t_2 + t_0, \\
t_5 - t_3 &= t_4 + t_2, \\
t_7 - t_5 &= t_6 + t_4, \\
t_9 - t_7 &= t_8 + t_6, \\
&\vdots \\
t_{2n-1} - t_{2n-3} &= t_{2n-2} + t_{2n-4}, \\
t_{2n+1} - t_{2n-1} &= t_{2n} + t_{2n-2}.
\end{aligned}$$

Quando repetimos o mesmo procedimento da soma das igualdades acima, os termos (ao lado esquerdo), com índices ímpares devem ser cancelados, de sorte que, ao lado direito, teremos dois somatórios de termos com índices pares. De modo simplificado, temos:

$$t_{2n+1} - t_1 = \sum_{i=0}^{n} t_{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} t_{2i}.$$

Isto é, encontramos que $S_{(2n)} + S_{(2n-2)} = t_{(2n+1)} - 1$, (item (ii)).

Analogamente, podemos eliminar os índices ímpares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t_4 - t_2 &= t_3 + t_1, \\ t_6 - t_4 &= t_5 + t_3, \\ t_8 - t_6 &= t_7 + t_5, \\ &\vdots \\ t_{2n} - t_{2n-2} &= t_{2n-1} + t_{2n-3}, \\ t_{2n+2} - t_{2n} &= t_{2n+1} + t_{2n-1}. \end{aligned}$$

Realizando a soma e os cancelamentos, temos:

$$t_{2n+2} - t_2 = \sum_{i=1}^{n} t_{2i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} t_{2i+1}.$$

Todavia, como $t_2 = t_1 = 1$, podemos ainda escrever:

$$t_{2n+2} = \sum_{i=0}^{n} t_{2i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} t_{2i+1} = S_{2n+1} + S_{2n-1}.$$

Logo, vale o item (iii).

Procedemos por indução, para $n \geq 3$, para provar que $S_n = 1 + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$. Se $n = 3$, temos que $1 + S_2 + S_1 + S_0 = 1 + 2 + 1 + 0 = 4 = S_3$. E, assumindo que a identidade vale para n, temos que:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + t_{n+1} &= (1 + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}) + t_{n+1} \\ &= (1 + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}) + (t_n + t_{n-1} + t_{n-2}) \\ &= 1 + (S_{n-1} + t_n) + (S_{n-2} + t_{n-1}) + (S_{n-3} + t_{n-2}) \\ &= 1 + S_n + S_{n-1} + S_{n-2}. \end{aligned}$$

$\square$

Agora, com origem nas relações anteriores, enunciaremos o seguinte teorema cuja demonstração é análoga ao Teorema 3.1.

Teorema 3.2. *Para qualquer inteiro $n \geq 2$ verificam-se as seguintes identidades:*

(i) $-t_{-n-2} = S_{-n} + S_{-n-1}$;

(ii) $S_{(2n)} + S_{(2n-2)} = t_{2n+1} - 1$;

(iii) $t_{2n+2} = S_{(2n+1)} + S_{(2n-1)}$;

(iv) $S_n = 1 + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$.

4 Resultados Principais

De posse das identidades e definições mostradas no decorrer deste artigo, será apresentada a Sequência Generalizada de Tribonacci- SGT, conhecida também como *Sequência Estendida de Fibonacci* [3], sendo esta uma extensão da Sequência de Fibonacci. Com isso, serão realizados alguns estudos sobre estes números levando em consideração o trabalho de [2].

Definição 4.1. *Dados os números arbitrários T_1, T_2, T_3 e a seguinte relação de recorrência $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ chamada de SGT.*

A partir da definição anterior e, ainda considerando os elementos do conjunto $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$, podemos obter as igualdades

$$\begin{aligned} T_4 &= 1.T_1 + 1.T_2 + 1.T_3, \\ T_5 &= 1.T_1 + 2.T_2 + 2.T_3, \\ T_6 &= 2.T_1 + 3.T_2 + 4.T_3, \\ T_7 &= 4.T_1 + 6.T_2 + 7.T_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

levando à conjectura

$$T_n = t_{n-2} \cdot T_1 + (t_{n-2} + t_{n-3}) \cdot T_2 + t_{n-1} \cdot T_3,$$

a qual será demonstrada a seguir.

Teorema 4.2. *Para qualquer inteiro $n \geq 4$ teremos o seguinte termo geral:*

$$T_n = t_{n-2} \cdot T_1 + (t_{n-2} + t_{n-3}) \cdot T_2 + t_{n-1} \cdot T_3.$$

Demonstração. Vejamos que

$$\begin{aligned}T_4 =& T_3 + T_2 + T_1 = T_1 + T_2 + T_3\\ =& 1 \cdot T_1 + (1+0)T_2 + 1 \cdot T_3\\ =& t_2 \cdot T_1 + (t_2 + t_1) \cdot T_2 + t_3 \cdot T_3.\end{aligned}$$

Admitindo o passo indutivo

$$T_k = t_{k-2}T_1 + (t_{k-2} + t_{k-3})T_2 + t_{k-1}T_3,$$

com $k = 4, 5, \cdots, n$, temos que

$$\begin{aligned}T_{n+1} =& T_n + (T_{n-1} + T_{n-2})\\ =& t_{n-2} \cdot T_1 + (t_{n-2} + t_{n-3}) \cdot T_2 + t_{n-1} \cdot T_3 + (T_{n-1} + T_{n-2})\\ =& t_{n-2}T_1 + (t_{n-2} + t_{n-3})T_2 + t_{n-1}T_3\\ & + t_{n-3}T_1 + (t_{n-3} + t_{n-4})T_2 + t_{n-2}T_3\\ & t_{n-4}T_1 + (t_{n-4} + t_{n-5})T_2 + t_{n-3}T_3\\ =& (t_{n-2} + t_{n-3} + t_{n-4})T_1\\ & + [(t_{n-2} + t_{n-3}) + (t_{n-3} + t_{n-4}) + (t_{n-4} + t_{n-5})]T_2\\ & + (t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3})T_3\\ =& t_{n-1}T_1 + (t_{n-1} + t_{n-2})T_2 + t_nT_3.\end{aligned}$$

□

Vamos agora considerar o comportamento da sequência para índices negativos. Para tanto, poderemos descrever propriedades envolvendo agora o seguinte conjunto:

$$(..., T_{-n-1}, T_{-n}, T_{-n+1}, T_{-n+2}, T_{-n+3}, ..., T_{-3}, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, ...).$$

Para tanto, a partir da Definição 4.1, tomamos $n = -1$ e obtemos

$$T_{-4} = T_{-1} - T_{-2} - T_{-3} = t_{-2}T_{-1} + (t_{-3} + t_{-4})T_{-2} + t_{-3}T_{-3}.$$

A partir do procedimento recursivo anterior, devemos encontrar as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
T_{-4} &= t_{-2}T_{-1} + (t_{-3} + t_{-4})T_{-2} + t_{-3}T_{-3},\\
T_{-5} &= t_{-3}T_{-1} + (t_{-4} + t_{-5})T_{-2} + t_{-4}T_{-3},\\
T_{-6} &= t_{-4}T_{-1} + (t_{-5} + t_{-6})T_{-2} + t_{-5}T_{-3},\\
T_{-7} &= t_{-5}T_{-1} + (t_{-6} + t_{-7})T_{-2} + t_{-6}T_{-3},\\
T_{-8} &= t_{-6}T_{-1} + (t_{-7} + t_{-8})T_{-2} + t_{-7}T_{-3},\\
T_{-9} &= t_{-7}T_{-1} + (t_{-8} + t_{-9})T_{-2} + t_{-8}T_{-3},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

levando à conjectura

$$T_{-n} = t_{-n+2}T_{-1} + (t_{-n+1} + t_{-n})T_{-2} + t_{-n+1}T_{-3},$$

a qual será demonstrada a seguir.

Teorema 4.3. *Para qualquer inteiro $n \geq 4$ temos*

$$T_{-n} = t_{-n+2}T_{-1} + (t_{-n+1} + t_{-n})T_{-2} + t_{-n+1}T_{-3}$$

Demonstração. Podemos proceder por indução. O caso $n = 4$ foi verificado acima. Agora, assumimos, para $k = 4, \cdots n$, que

$$T_{-k} = t_{-k+2}T_{-1} + (t_{-k+1} + t_{-k})T_{-2} + t_{-k+1}T_{-3}, \tag{4.1}$$

e, reparemos a relação $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n + T_{n-1}$. Substituindo o índice n por $-n$, vem que:

$$T_{-n+2} = T_{-n+1} + T_{-n} + T_{-n-1}.$$

Logo:

$$T_{-n-1} = T_{-n+2} - T_{-n+1} - T_{-n}.$$

Dessa forma, vamos somar $T_{-n+2} - T_{-n+1}$ em ambos os lados de (4.1), para obtermos:

$$(T_{-n+2} - T_{-n+1}) - T_{-n} = (T_{-n+2} - T_{-n+1}) - t_{-n+2}T_{-1} - (t_{-n+1} + t_{-n})T_{-2} - t_{-n+1}T_{-3}.$$

Temos que

$$T_{-n+1} = T_{-n+2} - T_{-n+1} - T_{-n}.$$

Pondo $k = n - 1$ e $k = n - 2$ em (4.1), respectivamente, temos

$$T_{-n+1} = t_{-n+3}T_{-1} + (t_{-n+2} + t_{-n+1})T_{-2} + t_{-n+2}T_{-3}$$

e

$$T_{-n+2} = t_{-n+4}.T_{-1} + (t_{-n+3} + t_{-n+2}).T_{-2} + t_{-n+3}.T_{-3}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} T_{-n+2} &= t_{-n+4}T_{-1} + (t_{-n+3} + t_{-n+2})T_{-2} + t_{-n+3}T_{-3}, \\ T_{-n+1} &= t_{-n+3}T_{-1} + (t_{-n+2} + t_{-n+1})T_{-2} + t_{-n+2}T_{-3}, \\ T_{-n} &= t_{-n+2}T_{-1} + (t_{-n+1} + t_{-n})T_{-2} + t_{-n+1}T_{-3}. \end{aligned}$$

No sistema anterior, segue que

$$\begin{aligned} T_{-n-1} =& T_{-n+2} - T_{-n+1} - T_{-n} \\ =& (t_{-n+4} - t_{-n+3} - t_{-n+2})T_{-1} \\ &+ (t_{-n+3} + t_{-n+2} - t_{-n+2} - t_{-n+1} - t_{-n+1} - t_{-n})T_{-2} \\ &+ (t_{-n+3} - t_{-n+2} - t_{-n+1})T_{-3} \end{aligned}$$

Por fim, notando que $t_{-n+4} - t_{-n+1} = t_{-n+3} + t_{-n+2}$ e, substituindo na expressão acima, encontramos

$$\begin{aligned} T_{-n-1} =& T_{-n+2} - T_{-n+1} - T_{-n} \\ =& t_{-n+1}.T_{-1} \\ &+ (t_{-n} + t_{-n-1})T_{-2} \\ &+ (t_{-n+3} - t_{-n+2} - t_{-n+1})T_{-3} \\ =& t_{-n+1}T_{-1} + (t_{-n} - t_{-n-1})T_{-2} + t_{-n}T_{-3}, \end{aligned}$$

onde utilizamos que $t_{-n} = t_{-n+3} - t_{-n+2} - t_{-n+1}$. Portanto,

$$T_{-n-1} = t_{-n+1}T_{-1} + (t_{-n} - t_{-n-1})T_{-2} + t_{-n}T_{-3}.$$

A prova é finalizada com a aplicação do Segundo Princípio da Indução Matemática. $\square$

Agora, de posse dos Teoremas 4.2 e 4.3 vamos verificar as seguintes propriedades que decorrem naturalmente, envolvendo a somação dos elementos anteriores.

Corolário 4.4. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, valem as relações:*

(i) $\displaystyle\sum_{i=4}^{n+1} T_i = \sum_{i=2}^{n-1} t_i T_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} t_i + \sum_{i=1}^{n-2} t_i\right) T_2 + \sum_{i=3}^{n} t_i T_3;$

$$(ii)\ \sum_{i=4}^{n} T_{-i} = \sum_{i=2}^{n-1} t_{-i}T_{-1} + \left(\sum_{i=3}^{n-1} t_{-i} + \sum_{i=2}^{n-2} t_{-i}\right) T_{-2} + \sum_{i=3}^{n-1} t_{-i}T_{-3}.$$

Demonstração. Com origem nos teoremas passados, vamos tomar as seguintes identidades e, logo em seguida, somá-las, de modo que os termos T_1, T_2, T_3 são colocados em evidência.

$$\begin{aligned}
T_4 &= t_2T_1 + (t_2 + t_1)T_2 + t_3T_3,\\
T_5 &= t_3T_1 + (t_3 + t_2)T_2 + t_4T_3,\\
T_6 &= t_4T_1 + (t_4 + t_3)T_2 + t_5T_3,\\
T_7 &= t_5T_1 + (t_5 + t_4)T_2 + t_6T_3,\\
&\vdots\\
T_n &= t_{n-2}T_1 + (t_{n-2} + t_{n-3})T_2 + t_{n-1}T_3,\\
T_{n+1} &= t_{n-1}T_1 + (t_{n-1} + t_{n-2})T_2 + t_nT_3.
\end{aligned}$$

Para os índices negativos, temos que:

$$\begin{aligned}
T_{-4} =& t_{-2}T_{-1} + (t_{-3} + t_{-4})T_{-2} + t_{-3}T_{-3},\\
T_{-5} =& t_{-3}T_{-1} + (t_{-4} + t_{-5})T_{-2} + t_{-4}T_3,\\
T_{-6} =& t_{-4}T_{-1} + (t_{-5} + t_{-6})T_{-2} + t_{-5}T_{-3},\\
T_{-7} =& t_{-5}T_{-1} + (t_{-6} + t_{-7})T_{-2} + t_{-6}T_{-3},\\
&\vdots\\
T_{-n} =& t_{-n+2}T_{-1} + (t_{-n+1} + t_{-n})T_{-2} + t_{-n+1}T_{-3}.
\end{aligned}$$

Somando as igualdades acima, teremos de imediato as identidades desejadas. □

5 Conclusão

Com base nos estudos realizados sobre esta sequência de Tribonacci, inicialmente estudados por [5], sendo então continuado posteriormente por [7] e [2], podemos investigar e estabelecer novas identidades desses números. Fundamentados nas considerações anteriores, destacamos que estas apresentam elementos suficientes à caracterização do alcance do objetivo geral da pesquisa na medida em que conseguimos a descrição de um estudo relativo às novas identidades da sequência de Tribonacci, a sua generalização e o comportamento dos termos para os índices positivos e negativos.

Referências

[1] ALVES,F.R.V. Engenharia Didática de 2a Geração com o tema: h(x)-Polinômios de Jacobsthal. Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista, vol. 8, n. 3, Set/Dez., 2018.

[2] ALVES, F.R.V. Fórmula de De Moivre, ou De Binet ou de Lamé: Demonstrações e Generalidades sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci-SGF. Revista Brasileira de História da Matemática, vol. 7., no. 33, p.1-16, 2017.

[3] ALVES, F.R.V.; NETO, H.B. A Existência da Sequência de Fibonacci no Campo dos Inteiros: Uma atividade de Investigação Apoiada nos pressupostos da Sequência de Fedathi. Boletim GEPEM, no. 59. Jul./Dez, p. 135-140, 2011.

[4] BROTHER, U. A. Introduction of Fibonacci Discovery. S.I.: The Fibonacci Association,1965.

[5] FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. The Fibonacci Quartely, [S.l.], v. 1. Oct., no. 3, p. 209-222.1963.

[6] FENG, J. More Identities On The Tribonacci Numbers. Ars Combinatoria - Waterloo then Winnipeg. Vol. 100, July, 2011.

[7] KOSHY, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: John Wiley and Sons, 2011.

[8] OLIVEIRA, R.R. de; ALVES, F.R.V.; PAIVA, R.E.B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 11. Dez., p. 91-106.

[9] WADDILL,M. E; SACKS, L. Another Generalized Fibonacci Sequence. The Fibonacci Quartely, [S.l.],v. 5, n. 3, p. 209-222 , Oct.1967.

[10] WELLS, D. Prime Numbers: the mysterious figures in the Math. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc, 2005.

Submetido em 16 de Setembro de 2018.
Aceito em 01 de Março de 2019.