SOBRE O MÉTODO DAS QUADRATURAS APLICADO ÀS SÉRIES[333]

G. W. Leibniz

Tradução Hudson Canuto e William de Siqueira Piauí[334]

Tendo estabelecido a quadratura da hipérbole e de todas as suas partes, segue-se a quadratura da figura dos logaritmos, com base nas demonstrações de Gregório de São Vicente e nos princípios demonstrados pelo P[adre] Sarrasa[335] sobre a relação entre logaritmos e a hipérbole. Descobri um método geral [*methodum invenerim generalem*][336] para descrever figuras que se podem quadrar universalmente, especialmente utilizando o segundo método de quadraturas universais, que procede por segmentos e semi-produtos [*per segmenta, et dimidias productas*][337]. Assim, com a descrição desta figura logarítmica, torna-se possível encontrar quaisquer médias proporcionais, simplesmente pela seção logarítmica da altura da figura, de modo que a seção de um ângulo ou razão [*rationis*] em uma dada proporção [*ratione*] seja reduzida à seção de uma reta na mesma proporção [*ratione*].

Com o método das quadraturas descoberto, especialmente aquele que opera por segmentos e semi-reduções [*per segmenta et dimidias reductarum*] ou por porções aplicadas, alcança-se algo superior a qualquer outra quadratura: um método para encontrar as somas de todas as séries, sejam infinitas ou finitas.

---

[333] "De methodi quadraturarum usu in seriebus" (1673). Com base nos manuscritos: LH 35 II 1 Bl. 237–238. 1 folha. 2º. 1 página no verso da folha 38. Folha 37 verso vazio, folha 38 verso vazio. Cc 2, Nr. 694 5. Agosto – setembro de 1673, razões para a datação: este texto se baseia no conteúdo de uma carta de H. Oldenburg datada de 16 de abril de 1673 (LSB III, 1 N. 13) e é escrito em papel cujo marca-d'água está registrado como sendo de agosto de 1673; primeiramente publicado em **GM**, III. Leibniz usa aqui o termo "*functio*", introduzido no tratado "Methodus tangentium inversa seu de functionibus" (Cc 2, Nr. 575, datado de agosto de 1673), o que sugere que este texto foi escrito depois desse momento. Como Leibniz não menciona a série circular em suas descobertas, é provável que o texto seja anterior ao outono de 1673. O original latino pode ser encontrado em https://rep.adw-goe.de/bitstream/handle/11858/2444/VII3A.pdf.

[334] Hudson Canuto é Professor do instituto Federal de Alagoas (IFAL), mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Sergipe (PPGF-UFS), e-mail canutohudson@gmail.com. William de Siqueira Piauí é doutor em Filosofia pela Universidade de São Paulo (FFLCH-USP), licenciado em matemática pelo IME-USP/Unit, líder do grupo de pesquisa GEFILUFS, professor associado do Departamento de Filosofia da UFS (DFL-UFS) e membro permanente do PPGF-UFS, e-mail piauiusp@gmail.com.

[335] Em parte, segundo os editores alemães, o matemático holandês Gregório de São Vicente (1584-1667) já foi mencionado algumas vezes na presente coletânea, seja com relação à **Dissertação sobre o estilo filosófico de Nizólio** XXXII, seja com relação aos **N.E.** IV, XVII, §13; escreveu um **Opus geometricum** (1647) onde teria explicitado sua descoberta da área sob uma hipérbole. Leibniz parece se referir ao matemático belga Alphonse Antonio Sarasa (1618-1667) que também teria contribuído para o estudo da hipérbole e dos logaritmos, escreveu um **Solutio problematis** (1649), onde explicita suas descobertas e a associação com os problemas tratados por Gregório de São Vicente.

[336] Segundo os editores alemães, método: veja a explicação na página 250, linha 6. Segundo método: sobre a história da origem do teorema de transmutação em conexão com Cc 2, nº 545/6, veja D. Mahnke, Neue Einblicke, 1926, pp. 34–37, e a explicação em LSB III, 1, p. 115 e seguintes.

[337] No sentido de divisão pela metade.

Nada maior pode ser desejado nas ciências que dependem do raciocínio puro. A série proposta – que suponho ser regular, ou seja, dependente de alguma equação, pois o caos confuso dos termos, quando carece de regra, certamente só pode ser somado ao total ao se recolherem os termos individualmente –, pode ser concebida como uma figura em que a unidade de construção não é infinitamente pequena e, assim, pode ser obtida por método geométrico sua soma por meio das porções aplicadas que mencionei. (O outro método, em que a soma dos senos se baseia, não é fácil de aplicar, a menos que a altura seja infinitamente dividida e o número de termos cuja soma é procurada seja infinito).

Vale notar que resolver este problema equivale a resolver outro problema de cálculo ou aritmética universal [*problema calculi seu arithmeticae universalis*], a saber, encontrar uma série, cujas diferenças sejam os extremos de uma série dada, um problema que, de outra forma, pareceria sem solução, mas que pode ser resolvido por este método. Pois, dada uma série, se se procura outra [série] cuja diferença entre os extremos coincida com os extremos da série dada, é necessário encontrar uma figura em que as linhas [ou retas], que representam os extremos da série dada, formem uma função [*functionem*] das porções aplicadas, conforme mencionei; e a partir da aplicação [*aplicattis*] desta figura retangular com sua abscissa dividida pela metade [*dimidiata*] teremos os extremos cujas diferenças corresponderão à série dada[338].

Ademais, mesmo que a série seja confusa, deve-se tentar reduzi-la a uma regra [*in regulam reduci*], tarefa que será objeto de uma arte especial e que tem algo em comum com as interpolações mencionadas por Collins[339], bem como com o que afirmei na [**Dissertação sobre a**] **arte combinatória**[340], de que não há confusão [grande o suficiente] em que um observador onisciente não consiga detectar alguma harmonia, mesmo que dependa de uma equação de grau altíssimo, por exemplo, do centésimo grau. No entanto, quando os termos são muitos, isso será extremamente difícil para um ser humano mortal, mesmo com regras dadas para tal; se forem poucos, não vale o esforço calcular a soma por este método, pois podem ser facilmente somados pelo método comum.

[338] Trata-se, portanto, de um enquadramento, dentro de um certo retângulo, por limites extremos da variação de uma série dada.

[339] John Collins ou Collinius (1625-1683), matemático membro da Royal Society que, dada a vasta correspondência que trocou com cientistas de sua época, dentre eles Leibniz, recebeu o apelido de Mersenne inglês, referência ao filósofo francês Marin Mersenne (1588-1648). Segundo os editores alemães Leibniz foi informado por H. Oldenburg em uma carta datada de 16 de abril de 1673 sobre o método de interpolação de Collins, talvez em referência ao que ele considerava em suas obras sobre os quadrantes, tais como o **The Description and Uses of a general Quadrant, with the Horizontal Projection upon it Inverted** (1658).

[340] Cf. a tradução de parte dessa obra que integra a coletânea **Leibniz e a linguagem (II): línguas artificiais, lógica e matemática** (no prelo), não conseguimos encontrar a presente referência, de todo modo Leibniz pode estar se referindo ao que afirma, isso sim, no §6 do **Discurso de metafísica**.

Dois outros frutos importantes dessa especulação são os seguintes: por meio dessa arte, pode-se, de certa forma, adivinhar e determinar a equação ou a razão que define a construção de uma série ou tabela, seja ela dada por um ser humano ou pela natureza. Por exemplo, se vê uma tabela calculada por um astrônomo[341] para declinações futuras ou observações feitas por navegadores, como Beaulieu[342], pode-se determinar a equação da série ou da tabela. A série dada também pode fazer parte de outras diversas, e, entre estas, deve-se escolher a mais simples ou a mais adequada às circunstâncias presentes, algo que pode ser determinado por outros meios.

Que os extremos possam ser parte de diferenças é demonstrado pelo seguinte: se, por exemplo, fosse adicionado um extremo sem relação com os outros, seria necessário recorrer a uma equação de regra mais elevada para determinar a série. Este é precisamente o campo da doutrina das hipóteses ou da adivinhação, que ninguém tratou com precisão. Parte disso inclui a doutrina de construir e resolver cifras[, ou seja, a decifração ou criptografia], algo que eu gostaria que Wallis[343] tratasse com rigor.

Outro uso dessa arte é reduzir termos confusos a uma forma regular de série, o que é de valor inestimável, especialmente quando são dadas várias quantidades irracionais cuja soma é procurada. Até agora, nenhum mortal encontrou um método para isso, mas este método oferece uma solução. Imagina-se que tais quantidades sejam partes de uma série regular cuja soma é procurada. Contudo, para evitar dificuldades excessivas no cálculo da natureza dessa série, somam-se dois ou três termos de cada vez e, em seguida, suas somas são novamente somadas pelo mesmo método.

Dessa forma, pode-se obter a soma de raízes irracionais, algo considerado impossível até agora e que eu mesmo julgava desesperador. No caso de uma série finita de irracionais, esse método não é apenas útil, como no caso de racionais finitos (onde os termos podem ser somados individualmente), mas também necessário, pois não há outro disponível; o mesmo se aplica a séries infinitas de racionais ou irracionais.

---

[341] Segundo os editores alemães, aqui Leibniz usa o termo *Anglus*, que se refere a Henry Bond (c.1600-1678), em seu "The Variations of the Magnetick Needle predicted for many years following", in **Philosophical Transactions** III Nr. 40 vom 19./29. Okt. 1668, S. 789 f. O texto e a tabela podem ser vistos em https://en.wikisource.org/wiki/Philosophical_Transactions_of_the_Royal_Society_(1665-1886)/Volume_3/Number_40.

[342] Segundo os editores alemães, Beaulieu: A. de Beaulieu, **Mémoires du voyage aux Indes orientales**, impresso em M. Thevenot [Ed.], **Relations de divers voyages curieux** II, 1666 [Marg.], contém nas páginas 124–127 uma tabela de declinação magnética compilada pelo timoneiro de Beaulieu, Le Tellier. As notas marginais a essa tabela, no exemplar de Leibniz (Biblioteca Estadual da Baixa Saxônia, Hannover E-A 10026), datam do período em que ele esteve em Hannover (veja a explicação em LSB III, 3, p. 445, bem como M. Palumbo, **Leibniz e i geographica**, 1996, pp. 31–33 e 198 e seguintes).

[343] Referência ao famoso matemático inglês John Wallis (1616-1703), segundo os editores alemães menciona-se sua atividade de decifração em **Mathesis universalis**, 1657, cap. IX, p. 56 (WO I, p. 47). A fonte de Leibniz foi possivelmente as indicações de Thomas Hobbes em **Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae**, 1660, p. 36, ou **Dialogus physicus**, 1661, p. 35 (correto: p. 34), também impressos em **Opera philosophica**, 1668, parte II, p. 38 e seguintes, ou parte VI, p. 38 (HOL IV, pp. 55 ou 290), ou ainda em B. de Monconys, **Journal des voyages**, p. 2, 1666, p. 54.

Todas as séries aritméticas podem ser reduzidas a séries de números naturais variadamente complicadas, assim como todas as séries geométricas podem ser reduzidas à abscissa x, pois sempre pode ser estabelecida uma relação entre a ordenada e a abscissa.