UMA BREVE INTRODUÇÃO AO PARADOXO DE RUSSELL: o que ele é, como ele afetou o sistema fregeano e sua possíveil solução[1]

Lauro Iane de Morais[2]

Resumo: Pretendemos fazer uma breve introdução ao Paradoxo de Russell, contextualizando-o na filosofia da matemática do final do século XIX e início do século XX. Para tanto, faremos uma breve caracterização do projeto logicista da matemática e após isso, mostraremos como o paradoxo afeta formalmente o sistema fregeano, bem indicaremos a solução de Russell para o problema.

Palavras-chave: Russell, Frege, logicismo, paradoxo, auto-referência, classes.

Abstract: We intend to make short introduction to Russell's Paradox, contextualizing it into the philosophy of mathematics of the end 19th and beginning of the 20th century. In order to do this, we'll briefly discuss the logicist project for the foundations of mathematics and after that, we'll show how the paradox afects Frege's symbolism as well as we'll indicate Russell's solution to this problem.

Keywords: Russell, Frege, logicism, paradox, self-reference, classes.

1 UM BREVE APANHADO DOS PROBLEMAS DA EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA NO SÉCULO XIX E XX

Um paradoxo é, grosseiramente, uma conclusão enigmática produzida por nosso raciocínio e que é, todavia, contra-intuitiva. Entre esses existem alguns de natureza lógica que vêm intrigando lógicos e filósofos desde a antiguidade[3]. Os mais comuns desses paradoxos lógicos são as antinomias que surgem a partir da noção de auto-referência; tais antinomias indicam que padrões de raciocínio tácitos ou bem aceitos devem ser explicitados e então evitados ou revisados[4]. O assim chamado Paradoxo de Russell é um exemplo desse tipo. O seu nome deve-se ao filósofo e lógico

1 O presente trabalho é fruto de um esforço em conjunto que vem sendo realizado pelo GEFILUFS. Gostaria de agradecer especialmente ao professor Dr. William de Siqueira Piauí por sua imensa dedicação e aos meus colegas Marcos Damascena, Allan Mesquita, Nelson Sant'Ana Neto e Álex Cândido pelo inestimável trabalho e compromisso que vimos realizando, sem os quais o presente trabalho não seria possível.

2 Graduando em Filosofia pelo DFL/UFS e-mail: lauromorais@msn.com

3 A respeito dos paradoxos na antiguidade, *cf*. Kneale e Kneale, 1962.

4 *Cf.* Slater.

britânico Bertrand A. W. Russell (1872-1970), que foi o primeiro a percebê-lo e tratá-lo detalhadamente[5]; sua descoberta ter-se-ia realizado durante seu contato com os textos do filósofo e lógico alemão F. L. Gottlob Frege (1848-1925)[6]. Para compreendermos melhor o significado do paradoxo e seu impacto na filosofia da matemática do final do século XIX e início do século XX, é forçoso que compreendamos o ambiente que os especialistas naquela área viviam durante esse período.

Na Crítica da Razão Pura, primeiramente publicada em 1781, Kant expôs a distinção dos juízos entre os analíticos e os sintéticos *a priori* e os sintéticos *a posteriori*. Com isso, a matemática e seus ramos – a geometria, aritmética, álgebra etc – passaram a ter sua justificação epistêmica não mais por serem dedutivamente válidas – como apontava Leibniz, por exemplo –, mas antes por serem construções de conceitos ou contagens numéricas realizadas na intuição pura espaciotemporal. Desse modo, o legado de Kant para a epistemologia da matemática foi tirar a necessidade das demonstrações matemáticas do âmbito das deduções e introduzi-la em sua noção de intuição espaciotemporal, que é um espaço euclidiano. A validade desses raciocínios passou a depender de intuições correspondentes, que deveriam possuir objetos capazes de serem representados em nossa intuição pura; caso contrário, trataríamos de conceitos vazios e, portanto, incapazes de produzir conhecimento. Todo empreendimento da matemática deveria, então, depender das condições de toda experiência possível e seus objetos dever-se-iam restringir àqueles que fossem capazes de serem representados no espaço euclidiano. Todavia, tal justificação epistêmica para a matemática já se encontrava defasada ainda quando Kant primeiramente a propôs; dentre várias objeções podemos numerar algumas: (i) há conceitos numéricos que não podem ser expressões como quocientes de números inteiros – como as construções na intuição espaciotemporal requerem – (*e.g.,* $\sqrt{2}$) e, ainda, há conceitos numéricos que não correspondem às ideias de medida e quantidade – que são intrínsecas à noção de número –, tais como os números imaginários (*e.g.,*$\sqrt{-1}$). De acordo com a epistemologia kantiana, esses números não poderiam ser representados na intuição espaciotemporal, portanto, não seriam propriamente números; (ii) logo após a morte de Kant, começou-se um estudo aprofundado sobre geometrias não-euclidianas, o que a epistemologia kantiana, por acreditar na realidade do espaço euclidiano – ainda que esse existisse

5 Sua exposição detalhada encontra-se na obra Princípios da Matemática [*Principles of Mathematics*]. No atual dossiê encontra-se a tradução do Apêndice B dessa obra, na qual Russell expõe um breve resumo das doutrinas lógicas de Frege, confrontando-as com suas próprias.

6 A fim de focarmos na versão apresentada por Russell, ignoraremos o debate acerca de quem teria sido o primeiro a descobrir esse paradoxo, todavia é digno de nota que outros lógicos teriam apontado contradições semelhantes. Para uma breve introdução ao tema *cf*. a entrada *Russell's Paradox,* na Enciclopédia de Filosofia da Stanford. Ademais, seguiremos em grande medida Zalta (2017) em sua formulação do simbolismo fregeano e posterior derivações.

no sujeito como forma de toda intuição sensível e não como coisa em si no que lhe é exterior –, não podia dar conta[7].

Desse modo, ao longo do século XIX, surgiu um vácuo na epistemologia da matemática: era necessário encontrar uma fundamentação mais capaz e completa para essa ciência. Nessa perspectiva, observamos o desenvolvimento do cálculo de classes juntamente com várias teorias conjuntistas. Nessa perspectiva, encontramos Cantor (1845-1918), Dedekind (1831-1916) *et ali*. Em suma:

> [...] a teoria de conjuntos abstratos e números infinitos, desempenha também um papel fundacional, uma vez que é possível reduzir noções matemáticas, como a de número, a noções conjuntistas e definir em termos conjuntistas estruturas matemáticas quaisquer – o que transforma teorias como a aritmética, as geometrias e as teorias algébricas abstratas em aspectos da teoria dos conjuntos.[8]

Todavia, foi somente com o desenvolvimento da lógica por Frege que foi possível operar uma síntese dos trabalhos até então realizados no cálculo de classes e em teorias conjuntistas, oferecendo um sistema dedutivo completo e baseado em uma nova linguagem ideal, ou Ideografia (a sua *Begriffsschrift).* Em resumo:

> A lógica inaugurada por Frege, que certamente não poderia imaginar a imensa fertilidade das terras que desbravara, serviu também para atacar questões da teoria dos conjuntos de Cantor. Formalizando essa teoria e estudando-a como um sistema lógico, pode-se mostrar que ela também é incompleta, ou seja, há asserções [...] que são indemonstráveis no sistema. Como a hipóteses ela mesma é verdadeira, ou é a sua negação, mas como nenhuma delas é demonstrável na versão formalizada da teoria dos conjuntos, então há asserções verdadeiras sobre conjuntos que são formalmente indemonstráveis.[9]

Essa lógica tornar-se-á a base do logicismo, que agora pode ser propriamente caracterizado como uma doutrina, dentro da epistemologia da matemática, que busca estabelecer as bases dos raciocínios matemáticos através de princípios lógicos que são rigorosamente demonstráveis numa língua abstrata. Em suma: “[...] partilho a opinião daqueles que consideram impraticável uma separação precisa entre ambas [a lógica e a matemática].”[10]

2 O PROJETO LOGICISTA

Enquadra-se ainda, dentro desse projeto inaugurado por Frege, Russell. Esse último, partindo de seus próprios estudos das teorias conjuntistas e fortemente influenciado pelos trabalhos

7 Para um debate aprofundado sobre a epistemologia da matemática kantiana e suas objeções, *cf.* Jairo, 2007, pp.93-121.
8 Jairo, 2007, p.116.
9 Jairo, 2007, p.120.
10 Frege, 1974, p.207.

de Giuseppe Peano (1858-1932), chegou a soluções muito semelhantes as de Frege, como podemos notar em seus textos:

> Espero ter neste escrito tornado verossímil que as leis aritméticas sejam juízos analíticos, e consequentemente *a priori*. A aritmética seria, portanto, apenas uma lógica mais desenvolvida, cada proposição aritmética uma lei lógica, embora derivada. As aplicações da aritmética à explicação da natureza seriam elaborações lógicas de fatos observados; calcular seria deduzir[11].

E ainda:

> Matemática pura é a classe de todas as proposições da forma "p implica q", na qual p e q são proposições contendo uma ou mais variáveis, a mesma nas duas proposições e nem p ou q contêm quaisquer constantes exceto constantes lógicas.
>
> [...]
> A conexão da matemática com a lógica, de acordo com a consideração acima, é extremamente próxima. [...] O fato é que, uma vez que o aparato da lógica foi aceito, toda matemática se segue necessariamente. [...] A distinção de matemática e lógica é muito arbitrária [...].[12]

Dentro desse projeto, uma das noções mais básicas e necessárias era aquela de classe, ou conjunto, pois, como dito acima, ao tratarmos números como classes, pode-se tratar as relações aritméticas como relações entre classes, relações algébricas como relações de classes de classes, etc; essas relações por sua vez são definidas em termos de constantes lógicas. A teoria dos percursos de valores de Frege, e seu subsequente uso da extensão de um conceito, é análoga à classe[13].

Vejamos, grosseiramente, o porquê o conceito de classe se tornou indispensável para esse projeto: suponhamos os conceitos "ser número par primo" e "ser número entre 1 e 3". Certamente, estaremos falando do mesmo número, *i.e.*, 2. Todavia, seria isso o mesmo que dizer que ambos os conceitos são equivalentes? Se por equivalência compreendermos que um conceito deva implicar o outro, certamente não – dito de outro modo, dos conceitos de número par e número primo, não se segue o conceito de número entre 1 e 3. Todavia, não se pode negar que ambos conceitos denotam o mesmo objeto, *i.e.,* o conceito de número 2 – e se, devido a algum tipo conclusão absurda fossemos obrigados a negar isso, a matemática encontrar-se-ia em sérios problemas, uma vez se que nem esses conceitos simples referir-se-iam a um número geral e determinado, mas a números diferentes e sempre particulares, como poderiam ser calculadas relações aritméticas que parecem denotar uma generalidade? Em vista disso, parece-nos plenamente intuitivo tomarmos o conceito dos números como classes que são a referência de conceitos. Portanto, nossos conceitos "ser número par primo"

---

11 Frege, 1974, p.271.

12 Russell, 2009, pp.3, 9-10.

13 *Cf.* nossa tradução do Apêndice B dos Princípios da Matemática no presente dossiê para uma discussão mais detalhada sobre essa identificação.

e “ser número entre 1 e 3”, apesar de diferentes, passarão a denotar somente um objeto determinado, a classe “2”. Assim, na medida que possuem a mesma referência, esses conceitos são equivalentes, pois implicam mutuamente a mesma classe, *i.e.,* terão o mesmo percurso de valor.

Frege generaliza tal constatação através de sua Lei Básica V, expressa nas Leis da Aritmética [*Grundgesetze der Arithmetik*]:

$$\epsilon F(\epsilon)=\epsilon G(\epsilon)\equiv\forall\ x[F(x)=G(x)]$$

Na qual a letra grega (épsilon) que precede os conceitos ‘F’ e ‘G’ indica a extensão dos respectivos conceitos. Desse modo, temos que as extensões de dois conceitos diferentes – *i.e.,* as classes que eles denotam – são idênticas se e somente se o mesmo objeto cai sob ambos os conceitos. Isso é, de fato, o prelúdio do paradoxo.

3 O PARADOXO DE RUSSELL

Esta abordagem de se tomar extensão de conceitos como um modo de se determinar as classes – denominada intensional, em oposição à abordagem extensional, que determina as classes a partir dos objetos que a compõem – era um tanto quanto usual entre os lógicos na época de Russell e o lógico britânico vinha estudando-a, até notar sua inconsistências, através dos trabalhos de Frege. A primeira comunicação desse problema da abordagem intensional é endereçada por Russell ao lógico alemão em 16 de Junho de 1902:

> Caro colega,
>
> Por um ano e meio eu venho estudando seu *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis da Aritmética]. [...] Encontro-me em completo acordo com você em todos os pontos essenciais [...]. Há apenas um ponto no qual encontrei uma dificuldade. Você diz (p.17) que uma função também pode ser tomada como um elemento indeterminado. Nisso eu acreditava anteriormente, mas agora essa visão me parece questionável por causa da seguinte contradição. Façamos *w* ser o predicado: ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. Pode *w* ser predicado de si mesmo? De cada uma das respostas, seu oposto se segue. Portanto, devemos concluir que *w* não é um predicado. Do mesmo modo, não há classe (enquanto totalidade) daquelas classes quais, cada uma tomada enquanto uma totalidade, não pertencem a si mesmas. Disso concluo que, sob certas circunstâncias, uma coleção definível [*Menge*] não forma uma totalidade.
>
> Estou a ponto de terminar um livro sobre os princípios da matemática e nele gostaria de discutir seu trabalho detalhadamente. Eu já tenho seus livros ou devo comprá-los em breve, todavia eu ficaria muito grato se você me enviasse cópias dos seus artigos em vários periódicos. No caso disso não ser possível, deverei obtê-los de uma biblioteca.
>
> O tratamento exato da lógica em questões fundamentais, onde símbolos falham, tem se mantido muito ultrapassado; em seus trabalhos eu encontro o melhor [tratamento] que conheço em nosso tempo e, portanto, eu venho expressar meu maior respeito por você. É lamentável que você ainda não tenha publicado o segundo volume de seu *Grundgesetze*; espero que isso ainda seja feito.

> Muito cordialmente,
>
> Bertrand Russell.
>
> A contradição acima, quando expressa na simbologia de Peano, lê-se do seguinte modo:
>
> $$w=(cls \cap x \ni (x \sim \in x)) \supset ((w \in w)=(w \sim \in w))$$
>
> Escrevi a Peano sobre isso, mas ele ainda me deve uma resposta.[14]

A qual rapidamente segue-se a resposta de Frege, em 22 de Junho de 1902:

> Caro colega,
>
> Muito obrigado por sua interessante carta [...]. Estou contente que você concorde comigo em muitos pontos e que pretenda discutir meu trabalho detalhadamente. Em resposta ao seu pedido, estou enviando as seguintes publicações [...].
>
> Sua descoberta da contradição me causou uma enorme surpresa e, eu quase diria, consternação, já que ela abalou as bases nas quais eu pretendia erigir a aritmética. Parece, assim, que transformar a generalização de uma igualdade em uma igualdade de percursos de valores [*die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit*] (§9 do meu *Grundgesetze*) não é sempre permissível, que minha Regra V (§20, p.36) é falsa e que minhas explicações no §31 não são suficientes para garantir que minhas combinações de signos tenham significação em todos os casos. Devo refletir aprofundadamente nesse assunto. Já que é muito grave que - com a perda da minha Regra V - não apenas as fundações da minha aritmética, mas também as únicas fundações possíveis da aritmética, parecem se perder. Ainda assim, penso eu, deve ser possível estabelecer condições para a transformação de uma generalização de uma igualdade em uma igualdade de percursos de valores tal que os [pontos] essenciais das minhas provas permaneçam intactos. Em qualquer caso, sua descoberta é muito extraordinária e talvez resultará em um grande avanço na lógica, por mais que ela pareça desagradável à primeira vista.
>
> [...]
>
> O segundo volume do meu *Grundgesetze* [Leis da Aritmética] deve surgir em breve. Sem dúvida terei que adicionar um apêndice no qual sua descoberta seja levada em consideração. Antes eu já possuísse uma abordagem correta para isso!
>
> Muito cordialmente,
>
> G. Frege.[15]

Podemos ilustrar o paradoxo da seguinte maneira: suponhamos a classe dos humanos. Certamente, a classe formada pelo conceito "ser humano" não é outro humano, apesar dos termos que pertencem a essa classe serem todos humanos. Portanto, a classe dos humanos não pertence a si

14 Russell, 1971, pp.124-125. Lê-se: "sendo w uma classe e *x* um elemento que pertence a ela, tal que *x* não pertence a *x*, então *w* pertence a *w* é igual a *w* não pertence a *w*." Substituímos a notação de pontos, utilizada por Peano e Russell, pela notação contemporânea, que utiliza parênteses, para facilitar a leitura.

15 Frege, 1971, pp.127-128.

mesma. Do mesmo modo que utilizamos o conceito "ser humano" para determinar a extensão desse conceito, *i.e.*, classe dos humanos, utilizemos o conceito "ser uma classe que não pertence a si mesma" e a extensão desse conceito será a classe das classes que não pertencem a si mesmas. Chamaremos tal classe de T. Vejamos agora se T pertence a T. Suponhamos (i) que T pertence a T. Nesse caso, se algo pertence a alguma classe, então esse algo cai sob o conceito cuja extensão é aquela classe; desse modo, se T pertence a T, então T cai sob o conceito "ser uma classe que não pertence a si mesma"; isso contradiz nossa hipótese. Suponhamos (ii) que T não pertence a T. Nesse caso, então ele cai sob o conceito "ser uma classe que não pertence a si mesma", conceito cuja extensão é o próprio T, e, portanto, T pertence a si mesmo. Isso também contradiz nossa segunda hipótese. Desse modo, o paradoxo parece nos mostrar que existem conceitos que não têm extensão e que, dada uma equivalência entre conceitos, segue-se que suas extensões são iguais; mas dado uma igualdade de extensões, não se segue uma equivalência de conceitos.

Dito de outro modo, podemos separar a Lei Básica V, que é uma bicondicional, em duas condicionais:

Va:¿

O que equivale a Va": ¿

Vb:¿

O que equivale a Vb": ¿

Va somente assere que (i) a correlação entre conceitos e suas extensões expressa na Lei Básica V deve ser uma função, dado que (ii) nenhum conceito fica correlacionado com duas extensões distintas; (iii) nota-se que conceitos diferentes podem estar correlacionados com a mesma extensão; (iv) por Va", se as extensões são distintas, também os são os conceitos. Todavia, Vb assere que (v) se as extensões são iguais, então os conceitos também são iguais; (vi), por Vb", toda vez que os conceitos diferirem, então suas extensões também serão diferentes. Portanto, torna-se claro como a Lei Básica V implica o paradoxo. A Lei Básica V exige existam mais conceitos que extensões, pois ainda que esses sejam diferentes, suas extensões serão idênticas; todavia conceitos que forem diferentes (vi) também terão extensões diferentes.

Dessa maneira, voltar-nos-emos ao nosso exemplo: os conceitos "ser número par e primo" e "ser número entre 1 e 3". Em vista do atual paradoxo, parece-nos agora que, sendo esses conceitos diferentes, também serão suas extensões diferentes. Seríamos agora obrigados a adotar aquela posição absurda de que as classes denotadas por "ser número par e primo" e "ser número entre 1 e

3” são diferentes, portanto, não são “2”? E como pode a aritmética representar a generalidade necessária a suas operações caso isso seja possível?[16]

Nas palavras do próprio Frege:

> Dificilmente algo mais desagradável pode sobrevir a um escritor científico que uma das fundações de seu edifício seja abalada após seu trabalho ter sido terminado.
>
> Eu fui colocado nessa posição por uma letra do Sr. Bertrand Russell justamente quando a impressão desse [segundo] volume estava chegando ao seu fim. É um problema da minha Lei Básica V. Eu nunca escondi de mim mesmo a sua falta de auto evidência que as outras [leis] possuem e que tal coisa deve ser apropriadamente exigida de uma lei da lógica e de fato eu apontei essa fraqueza na Introdução ao primeiro volume [...]. Eu teria diligentemente abandonado essa fundação se eu conhecesse qualquer substituto para ela. E mesmo agora não vejo como a aritmética pode ser cientificamente fundamentada, como números podem ser concebidos como objetos lógicos e trazidos sob certo estudo, a menos que sejamos permitidos - pelo menos condicionalmente - a passar de um conceito para sua extensão. É sempre permissível se falar da extensão de um conceito, de uma classe? Se não for, como reconheceremos os casos excepcionais? Podemos sempre inferir da extensão de um conceito coincidir com a extensão de um outro, que todo objeto que cai sob o primeiro conceito também caia sob o segundo? Essas são as questões levantadas pela comunicação do Sr. Russell.
>
> *Solatium miseris, socios habuisse* malorum [A consolação do miserável é ter companheiros em sua desgraça]. Eu também tenho esse consolo, se consolo isso é; pois todos que em suas provas utilizaram extensões de conceitos, classes, conjuntos, está na mesma posição [que eu]. Não é apenas uma questão do meu método particular de se estabelecer as fundações, mas [é uma questão de] se é de alguma forma possível uma fundação lógica da aritmética.[17]

4 OUTRA DERIVAÇÃO DO PARADOXO DENTRO DO SISTEMA FREGEANO

No §55 das Leis Básicas da Aritmética, Frege deriva o Teorema (1), conhecido como Leis das Extensões. Esse teorema assere que um objeto pertence a extensão de um conceito se e somente se ele cai sob aquele conceito. A partir dele, outra derivação do paradoxo pode ser realizada:

1. $\forall F \forall x(x \in \epsilon F \equiv Fx) \textit{Leis das Extensões}$
2. $\forall x(x \in \epsilon F \equiv Fx) 1, \forall E$
3. $\exists y \forall x(x \in y \equiv Fx) 2, \exists I$
4. $\forall F \exists y \forall x(x \in y \equiv Fx) 3, \forall I$
5. $\exists y \forall x(x \in y \equiv [\lambda z . z \notin z] x) 4, \forall E$
6. $\exists y \forall x(x \in y \equiv x \notin x) 5, \lambda - conversão$

16 Essas preocupações, dentre outras, deverão nortear Russell durante sua investigação do sistema fregeano e sua subsequente reformulação, através dos apêndices A e B, da teoria dos tipos lógicos exposto nos primeiros capítulos dos Princípios da Matemática.

17 Frege, 1967, p.127.

7. $\forall\ x(x \in a \equiv x \notin x)$ 6,$\exists$ E
8. $(a \in a \equiv a \notin a)$ 7,$\forall$ E

5 CONCLUSÕES

O Paradoxo de Russell, chamado pelo próprio lógico britânico de Contradição, é várias vezes remontada ao longo dos Princípios da Matemática[18]. Sua descoberta afetou subsequentes desenvolvimentos do projeto logicista e da matemática no geral, uma vez que solapou a possibilidade de um fundacionismo intensional aos moldes fregeanos. De fato, na tentativa de evitar o surgimento do paradoxo, Russell irá cada vez mais se aproximar de uma teoria das classes extensional – pois como mostramos, uma abordagem demasiado intensional das classes nos leva inevitavelmente ao paradoxo –, culminando em sua teoria dos tipos exposta nos *Principia Mathematica* (1910-1913). Todavia, os germens de sua teoria dos tipos podem ser remontados aos Princípios da Matemática; através dos apêndices A e B Russell busca oferecer soluções mais adequadas a contradição e aos argumentos oferecidos por Frege a favor de uma abordagem intensional das classes.

Uma das variações mais comuns do Paradoxo de Russell é a do barbeiro, muito utilizado ao tentar-se explicar o paradoxo. Todavia, achamos tal versão demasiado simplista, por ignorar que o verdadeiro objeto do paradoxo são classes, não indivíduos. Dessa forma, essa variação do paradoxo, não parece contribuir muito para o entendimento das questões importantes levantadas em epistemologia da matemática e do desenvolvimento da lógica formal[19].

6 REFERÊNCIAS

FREGE, G. *Lógica e filosofia da linguagem*. 2.ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*. In Peirce e Frege: Col. Os pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

FREGE, Gottlob. *Letter to Russell*. In: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971. pp. 127–128.

18 *Cf.* o capítulo "*The Contradiction*" dos Princípios da Matemática. Ademais, ao longo do livro são oferecidas variações do mesmo paradoxo em diversas da lógica e da matemática.

19 *Cf.* Russell, 2009, pp.101-102. A crítica a essa analogia é desenvolvida pelo autor.

FREGE, Gottlob. *The basic laws of arithmetic: exposition of the system*. Translated by M. Furth. Berkeley: University of California Press, 1967.

IRVINE, Andrew David; DEUTSCH, Harry. "Russell's Paradox". The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL= < https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/russell-paradox/>.

KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura.* Trad. Manuela Pinto dos Santos, Alexandre Fradique Morujão. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2001.

KNEALE, W.; KNEALE, M. *The development of logic.* Oxford: Clarendon Press, 1962.

RUSSELL, B; WHITEHEAD, A. N. Principia mathematica. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913. 3 v.

RUSSELL, Bertrand. *Letter to Frege*. In: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971. pp. 124–125.

RUSSELL, Bertrand. *Principles of mathematics*. 3rd ed. [Oxford]: Taylor & Francis, 2009.

RUSSELL, Bertrand. *The Philosophy of Logical Atomism*. Abingdon: Taylor & Francis, 2009.

SILVA, Jairo José da. *Filosofias da matemática*. São Paulo: UNESP, 2007.

SLATER, Barry Hartley. “Logical Paradoxes”. The Internet Encyclopedia of Philosophy, ISSN 2161-0002, http://www.iep.utm.edu/, 17/02/2018.

ZALTA, Edward N. “Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic”.The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL= <https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/frege-theorem/>.