

NOTA INTRODUTÓRIA

Nos praticamente cinco anos de existência do GEFILUFS (Grupo de Estudos de Filosofia da Linguagem da Universidade Federal de Sergipe), sempre procuramos pensar os problemas da Filosofia da Linguagem a partir de duas grandes vias, aquela que nos acostumamos a chamar de “via mais continental”, que incluía obras como a **Gramatologia** de Derrida, **As palavras e as coisas** de Foucault, **A prosa do mundo** de Merleau-Ponty, **A caminho da linguagem** de Heidegger, **A filosofia das formas simbólicas** de Cassirer e muitas outras, e aquela que nos acostumamos a chamar de “via mais anglo-saxã”, que incluía obras como a **Conceitografia** de Frege, **Significado e verdade** de Russell, **A estrutura lógica do mundo** de Carnap, **Tractatus logico-philosophicus** de Wittgenstein e muitas outras. Os problemas de tal partição são evidentes, muitos autores e problemas importantes para termos uma pequena ideia do que pode ser considerado Filosofia da Linguagem ficam de fora, é o caso, por exemplo, do que poderíamos denominar a “via dos linguistas”, como Bakhtin, Saussure, Jakobson, Benveniste, Hjelmslev, Labov, Chomsky etc, e a de toda uma tradição que seguiu mais próxima dos estudos clássicos ou da noção de intencionalidade, como o caso de Austin e Searle, e da Retórica, como Perelman, e ainda assim muitíssimo fica de fora. Outro problema, consequência de variedade de abordagens possíveis, diz respeito ao difícil cruzamento dessa imensa gama de problematizações e é aqui que acreditamos ser importante registrar um estudo mais específico que fizemos nos últimos três anos e que teve como consequência a presente tradução e alguns trabalhos que mencionaremos adiante.

Como já mencionado acima, a imensa variedade de abordagens possíveis da Filosofia da Linguagem gera a dificuldade de como encontrar os pontos comuns e identificar reais avanços nos mais variados termos em que poderíamos pensá-los. O que percebemos nos últimos três anos de estudos que realizamos nas reuniões do GEFILUFS é que a “filosofia da linguagem” defendida por Deleuze em **Lógica do sentido**, especialmente na série “Da proposição”, e a posteriormente elaborada com a colaboração de Guattari em **Mil platôs**, especialmente os momentos em que tratam dos “Postulados da linguística” e “Sobre alguns regimes de signos” (volume II, na tradução para o português do Brasil), e **O que é filosofia?**, especialmente o capítulo “Prospectos e conceitos”, permite cruzar com uma considerável amplidão aquela gama de problematizações e ao menos apostar na identificação de reais avanços quando pensamos as associações linguagem e arte ou linguagem e política; muito resumidamente, podemos dizer que os operadores que propiciam tal cruzamento e amplidão são: sentido e expesso, palavra de ordem e agenciamento coletivo de

enunciação, conceito e acontecimento; e podemos dizer que em quaisquer desses casos o que faz principalmente a base dessa “filosofia da linguagem” é a noção estoica do *lekton*¹, do dizível.

Para o que nos interessa quanto a presente tradução, são justamente esses operadores que vão permitir a crítica daquela, dentre outras, “via mais anglo-saxã” que, segundo Deleuze-Guattari de **O que é filosofia?**, subverte a noção de conceito (filosófico) a partir de uma indevida ampliação ou uso irrestrito da noção fregeana-russelliana de função. É principalmente para a compreensão no detalhe de tal crítica que serviria a presente tradução. Trata-se da tradução do Apêndice A, e não somente o §477, de **Os princípios da matemática** de Russell, livro que fora publicado a primeira vez em 1903 e que desde 1905 já contava com tradução para o francês; parte da obra em que é feito, como o próprio título do apêndice indica, um balanço da “filosofia da linguagem” de Frege e que serve de ponto de partida para a crítica de Deleuze-Guattari à “lógica reducionista” desde o início de “Prospectos e conceitos” de **O que é filosofia?**, mas que também deve ser considerada como um novo ponto de partida, a partir de uma crítica mais ferrenha, para a leitura de **Significado e verdade**, também de Russell, que já havia sido feita em **Lógica do sentido**.

Trabalharam para a realização da presente tradução: Alana Boa Morte Café (CAFÉ, A. B.), Álex Deiwison Fiel de Andrade Candido (CANDIDO, A. A.), Allan Wolney Mesquita Santos (SANTOS, A. W. M.), Lauro Iane Moraes (MORAIS, L. I.), Marcos Deyvinson Ferreira Damacena (DAMACENA, M. D. F.), Nelson Silvério de Sant’Ana Neto (SANT’ANA NETO, N. S.) e William de Siqueira Piauí (PIAÚÍ, W. S.). Tradução que foi realizada a partir da versão dos **Principles of Mathematics** feita pela editora Routledge no ano de 2010. O leitor verificará que, além das do próprio autor, evidentemente, acrescentamos algumas notas que permitem compreender melhor os pontos de vista e de partida de Russell; além disso, dado o tamanho que assumiria uma nota sobre o paradoxo de Russell-Frege, em alguns momentos preferimos nos remeter ao artigo escrito por Lauro Iane Moraes, que, por esse motivo, também consta no presente dossiê. Também foi elaborado no mesmo âmbito de pesquisa, mas aqui explicitando as ideias do texto “On denoting” de Russell especialmente no debate com Meinong, o artigo de Alex Deiwison Fiel de Andrade Cândido publicado na revista **O manguezal** (n.1, v. 1, 2017), com o título “Teoria das descrições definidas e o debate com Meinong em ‘On denoting’”. Gostaríamos, além disso, de recomendar a leitura da introdução, a qual infelizmente não tivemos o tempo devido para finalizar a tradução, feita por

¹Além das obras de Deleuze e Guattari aqui mencionadas, temos de lembrar o estudo de E. Brehier intitulado **A teoria dos incorporais no estocicismo antigo**, recentemente traduzido para o português, leitura obrigatória para uma melhor compreensão do que estamos tentando dizer aqui, e acrescentaríamos alguns dos estudos sobre estoicismo feitos pelo nosso colega de departamento Aldo Lopes Dinucci, por exemplo, **Introdução à lógica proposicional estoica** (cf. p. 23 ss.).

Claude Imbert aos textos de Frege, também mencionada no mesmo capítulo de **O que é filosofia?** E aqui temos de agradecer pela leitura do texto de C. Imbert feita no GEFILUFS com o auxílio do mestrando do PPGF-UFS Marcos Sávio Santos Águiar, que também escreve nesse dossiê, sem a qual teríamos perdido muitos detalhes da diferença entre o francês e o português necessários à tradução do original em inglês; também agradecemos aos alunos, do mesmo programa, Alípio José Viana Pereira Neto, por ter participado ativamente das leituras dos textos de Frege, Russell e Wittgenstein que duraram cerca de dois longos anos, e Cinthia Almeida Lima, pelo início da tradução do texto de Russell.

Por fim, esperamos sinceramente que a presente tradução possa contribuir para a compreensão do difícil capítulo “Prospectos e conceitos” e mesmo para uma reavaliação da série “Da proposição”, textos fundamentais para a compreensão do que seria uma “filosofia da linguagem” de Deleuze-Guattari.

Obs.: As referências bibliográficas que finalizam a presente nota, dizem respeito às obras utilizadas aqui e nas notas elaboradas pelos tradutores.

1 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRÉHIER, Émile. **A teoria dos incorporais no estoicismo antigo**. Trad. Fernando Padrão de Figueiredo e José Eduardo Pimentel Filho. Belo Horizonte: Antêntica, 2012.

CANDIDO, A. A. “Teoria das descrições definidas e o debate com Meinong no ‘On denoting’”. **O manguezal**, v. 1, n. 1, pp. 6–16, 2017.

DELEUZE, Gilles e GUATTARI, Félix. **Mil platôs** (vol. 2). Trad. Ana Lúcia de Oliveira e Lúcia Cláudia Leão. Rio de Janeiro: Ed. 34, 2011.

_____. **O que é filosofia?** Trad. Bento Prado Jr. E Alberto Alonso Muñoz. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1992.

_____. **Lógica do sentido**. Trad. Luiz Roberto Salinas Fortes. São Paulo: Ed. Perspectiva, 2003.

DINUCCI, Aldo e DUARTE, Valter. **Introdução à lógica proposicional estoica**. São Cristóvão: Editora da UFS, 2016.

DUDMAN, V. H., “TRANSLATION OF SCHRÖDER'S REVIEW OF BEGRIFFSSCHRIFT”. **The Southern Journal of Philosophy**. 7, p. 139 – 150, 1969.

FREGE, Gottlob. **Conceitografia**. Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo: Instituto Brasileiro de Filosofia e Ciência “Raimundo Lúlio”, 2012.

_____. **Os fundamentos da aritmética**. Trad. Luís Henrique dos Santos. 3 edição. São Paulo: Abril Cultural. 1983. (Col. **Os pensadores**)

_____. **Lógica e filosofia da linguagem**. Trad. Paulo Alcoforado. 2 edição. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo. 2009.

_____. **O pensamento: uma investigação lógica. Investigações lógicas (1918-9)**. Tradução de Paulo Alcoforado. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

GABBAY, D. M.; WOODS, J. H., **Handbook of the History of Logic**, volume 3, Rise of Modern Logic: from Leibniz to Frege. Primeira edição. Amsterdam: Elsevier B.V., 2004.

IMBERT, Claude. **Écrits logiques et philosophiques de Gottlob Frege**. França: Éditions du Seuil, 1971.

RUSSELL, Bertrand e WHITEHEAD, Alfred N. **Principia mathematica**. Cambridge, Ing.: University Press, 1963.

_____. **Significado e verdade**. Trad. Alberto Oliva. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

_____. “On denoting”. **Mind**, v. 14, p. 479-493. Oxford: Oxford University Press, 1905.

_____. **Principles of Mathematics**. Londres: Routledge, 2010.

SCHRÖDER, E. “Review of Frege 1879”. **Zeitschrift für Mathematik und Physik historisch-literarische Abtheilung**, v. 25, p. 81-94, 1880.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY. **Principia Mathematica**. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/> Acesso em: 10/02/2018.

WITTGENSTEIN, Ludwig Josef Johann. **Tractatus logico-philosophicus**. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EDUSP, 1993.

_____. **Investigações Filosóficas**. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Abril Cultural, 1975. (Col. **Os pensadores**).

APÊNDICE A AS DOCTRINAS LÓGICAS E ARITIMÉTICAS DE FREGE

Bertrand Russell

475. O trabalho de Frege, que parece ser muito menos conhecido do que merece, contém muitas das doutrinas apresentadas nas partes I e II da presente obra e, quando ele diverge das perspectivas que aqui adotei, essas divergências exigem discussão. O trabalho de Frege é repleto de distinções sutis e evita todas as falácias usuais que acometem os escritores de lógica. Seu simbolismo – embora, desafortunadamente, de tal forma intrincado que muito dificilmente é empregado na prática – é baseado em uma análise de noções lógicas muito mais profunda que a de Peano¹ e é filosoficamente muito superior ao seu rival mais imediato. A seguir, tentarei expor com brevidade as teorias de Frege em seus pontos mais importantes e explicar meus fundamentos para discordância quando ocorrer de discordar dele. Porém, são poucos os pontos de divergência e pequenos em comparação àqueles de concordância. Todos eles decorrem da diferença em três pontos: (1) Frege não entende haver uma contradição na noção de conceitos que não podem ser assumidos como entes lógicos (ver § 49 supra); (2) ele entende que, se um termo² *a* ocorre em uma

1 Giuseppe Peano (1858-1932) foi um matemático italiano, também foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos. Ele é conhecido pelo seu trabalho na axiomatização dos números naturais. Os nove axiomas que resultaram deste trabalho são conhecidos como Axiomas de Peano, ou Axiomas de Dedekind-Peano. Russell conheceu o italiano na Primeira Conferência Internacional de Filosofia, em 1900, onde Peano lhe apresentou uma cópia do seu projeto intitulado “Projeto Formulário”. Esse projeto se pretendia uma enciclopédia da matemática que conteria as formalizações de todas as fórmulas e teoremas conhecidos até então, além do mais, estava sendo escrito a partir de uma notação criada pelo próprio Peano. Em 1908, o matemático publicou a última edição deste projeto, agora intitulado *Formulario Mathematico*. No prefácio da obra intitulada **Principles of Mathematics**, da qual este apêndice é parte, Russell menciona o trabalho de Peano em dois momentos. Em primeiro lugar, enfatiza a qualidade do método do italiano – quando associado à lógica de relações – nos desenvolvimentos feitos pelo próprio Russell. Em segundo lugar, afirma que na parte essencialmente matemática de sua obra, ele deve agradecimentos aos trabalhos de Peano, importante, principalmente, pelo seu simbolismo, e Cantor, pela Teoria dos Conjuntos. Além do mais, as contribuições de Peano são citadas ora ou outra nessa obra – inclusive, há uma seção dedicada ao simbolismo lógico desenvolvido pelo matemático. Também vale lembrar que a notação utilizada por Whitehead e Russell no **Principia Mathematica** ainda é a mesma – no que diz respeito aos conectivos, símbolos de relação e quantificadores – que foi desenvolvida por Peano e que já havia sido utilizada por Russell também nos **Principles of Mathematics**.

2 O vocábulo “termo” assume, no contexto da presente obra (ou seja, dos *Princípios da Matemática*) um uso técnico. A sua definição é como se segue (§47-48): “O que quer que seja que possa ser um objeto do pensamento ou possa ocorrer em qualquer proposição verdadeira ou falsa ou que possa ser contado como *um*, eu denomino *termo*. Essa é, então, a palavra mais polissêmica [*widest*] no [presente] vocabulário filosófico. Devo utilizá-lo como sinônimo de unidade, indivíduo e entidade. Os primeiros dois enfatizam o fato que todo termo é *um*, enquanto o terceiro é derivado do fato que todo termo tem ser, *i.e.*, é em algum sentido [*sense*]. Um homem, um momento, um número, uma classe, uma relação, uma quimera ou qualquer outra coisa que pode ser mencionada é um termo; e negar que tal coisa é um termo deve sempre ser falso. Pode-se pensar que uma palavra de tamanha generalidade não seria útil. Todavia, tal visão, devido a doutrinas filosóficas muito difundidas, seria enganosa. Um termo possui de fato todas

proposição, esta proposição pode sempre ser analisada em *a* e como uma asserção acerca de *a* (ver capítulo 7); (3) ele não está ciente da contradição discutida no capítulo 10³. Estas são questões muito fundamentais, e será bastante oportuno discuti-las novamente, uma vez que a última discussão foi escrita quase que em total ignorância do trabalho de Frege.

Frege é obrigado, assim como tenho sido, a empregar vocabulário comum em sentidos técnicos que partem mais ou menos de seu uso. Como seus pontos de partida são frequentemente diferentes dos meus, surge uma dificuldade no que concerne à tradução de seus termos. Destes, para evitar confusão, deixarei alguns sem tradução, uma vez que todo equivalente em inglês no qual consigo pensar já foi empregado por mim em um sentido ligeiramente diferente.

Os principais tópicos sob os quais as doutrinas de Frege serão discutidas são os seguintes: (1) sentido [*meaning/sinn*] e referência [*indication/bedeutung*]; (2) valores de verdade e juízo; (3) *Begriff* [conceito] e *Gegenstand* [objeto]; (4) classes; (5) implicação e lógica simbólica; (6) a definição de números inteiros e o princípio da abstração; (7) indução matemática e a teoria das progressões. Tratarei destes tópicos sucessivamente.

476. Sentido [*sinn*] e referência [*bedeutung*]. A distinção entre sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*)⁴ é em linhas gerais, ainda que não exatamente, equivalente à minha distinção entre o conceito como tal [*concept as such*] e o que o conceito denota [*denotes*] (§ 96)⁵. Frege não apresentava essa distinção nos dois trabalhos levados em consideração (a *Begriffsschrift*

as propriedades comumente atribuíveis [*assigned*] a substâncias ou a substantivos. Para começar, todo termo é um sujeito lógico: ele é, por exemplo, sujeito da proposição que ele próprio é um. Ademais, todo termo é imutável e indestrutível. O que um termo é, ele é, e nenhuma mudança pode ser nele concebida sem que se destrua sua identidade e o faça outro termo. Outra marca [*mark*] que pertence aos termos é a identidade numérica com eles próprios e diversidade numérica com todos os outros termos. A identidade e a diversidade numérica são a fonte da unidade e da pluralidade; e assim a admissão de muitos termos destrói o monismo. E parece ser inegável [*undeniable*] que todo constituinte de toda proposição possa ser contado como um e que nenhuma proposição contem menos que dois constituintes. Termo é, portanto, uma palavra útil, uma vez que [o vocábulo] marca uma divergência com várias filosofias, assim como, em várias sentenças, queremos falar de *qualquer* termo ou de *algum* termo. Entre os termos, é possível distinguir entre dois tipos, que denominarei respectivamente *coisas* e *conceitos*. Os primeiros são os termos indicados [*indicated*] por nomes próprios, os últimos, aqueles indicados por todas as outras palavras. Aqui nomes próprios devem ser entendidos de uma maneira mais ampla [*wider*] que a usual, e coisas também devem ser entendidas como compreendendo [*embracing*] todos os pontos particulares, instantes e muitas outras entidades que não são comumente chamadas de coisas. Mais uma vez, entre os conceitos, no mínimo dois tipos devem ser distinguidos, nomeadamente aqueles indicados por adjetivos e aqueles indicados por verbos. Os do primeiro tipo serão frequentemente denominados predicados ou conceito-classes; os últimos são sempre, ou quase sempre, relações”.

3 A respeito da contradição de Russell, conferir artigo de MORAIS, L. I. (2018), publicado no presente dossiê.

4 Não traduzo *Bedeutung* [referência] por denotação [*denotation*] porque essa palavra tem um sentido técnico diferente do de Frege e também porque *bedeuten* [referenciar], para ele, não é bem o mesmo que denotar [*denoting*] para mim (N. A.). Para as menções a Meinong vale lembrar o séria “Da proposição” de a **Lógica do sentido** de Deleuze, mas especialmente a partir da página 20 quando o “grande filósofo e lógico” é mencionado como aquele que permitiria falar em um novo reconhecimento, agora no século XIX, do sentido como quarta dimensão da proposição. Valeria a pena dar uma lida no artigo “Teoria das descrições definidas e o debate com Meinong no ‘On denoting’” de CANDIDO, A. A., já mencionado na nota introdutória.

[Conceitografia] e os *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética]); ela aparece primeiro em *Ueber Begriff und Gegenstand* [Sobre o conceito e o objeto] (ver p. 198)^{6 7}, e é trabalhado especialmente em *Ueber Sinn und Bedeutung* [Sobre o sentido e a referência]. Antes de realizar a distinção, ele entendia que identidade tinha alguma relação com os nomes dos objetos (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 13): “A é idêntico a B” quer dizer que [*means*], afirma ele, o sinal [*sign*] A e o sinal [*sign*] B têm a mesma significação [*signification*] (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 15)⁸ – uma definição que, ao menos verbalmente, sofre de circularidade. Mas, posteriormente ele explica identidade [*identity*] praticamente do mesmo modo como ela é explicada no § 64. “A identidade [*identity*]”, diz ele, “desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos [*gegenstand*]? Ou entre nomes [*names*] ou sinais [*signs*] de objetos [*gegenstände*]?” (*Ueber Sinn und Bedeutung* [Sobre o sentido e a referência], p. 25)⁹. Devemos distinguir, diz ele, o sentido [*meaning*], no qual está contido o modo de apresentação, do que é designado [*indicated*] (a partir do *Bedeutung* [referência]). Assim, “a estrela vespertina” e “a estrela matutina” têm a mesma referência [*indication*], mas não o mesmo sentido [*meaning*]. Uma palavra comumente expressa sua referência [*indication*]; se desejamos falar de seu sentido [*meaning*], devemos utilizar aspas ou algum dispositivo deste tipo (pp. 27-8)¹⁰. A referência de um nome próprio [*proper name*] é o objeto [*object*] ao qual ele se refere [*indicates*]; a representação que o acompanha é bastante subjetiva; entre ambos se encontra o sentido [*meaning*], que não é subjetivo e, no entanto, também não é o próprio objeto [*object*] (p. 30)¹¹. Um nome

5 O que o conceito denota é o indivíduo, ou os indivíduos, em si. O conceito como tal é a expressão usada para se referir, ou denotar, e fazer uma declaração acerca desses indivíduos. No “On denoting”, Russell, ao falar da distinção feita por Frege, diz: “esse procedimento [tal distinção], apesar de não levar realmente a um erro lógico, é puramente artificial e não fornece uma análise correta da questão.” (RUSSELL, 1905, p. 484), o que nos mostra sua clara ruptura com a opinião expressa nos **Princípios da matemática**.

6 Quando Russell cita Frege indicando paginação, remeteremos o leitor às traduções disponíveis no português. São elas: a **Conceitografia** e os artigos “Função e conceito”, “Sobre o conceito e o objeto” e “Sobre o sentido e a referência”, todas traduzidas por Alcoforado; bem como, **Fundamentos da Aritmética**, traduzida por Lopes dos Santos, cf. Referências bibliográficas da nota introdutória.

7 “Quando escrevi meus **Fundamentos de Aritmética**, ainda não havia feito a distinção entre sentido e referência, e por isso reunia sob a expressão ‘conteúdo asserível’ o que agora distingo e designo pelas palavras ‘pensamento’ e ‘valor de verdade’” (FREGE, 2009, p. 117-118).

8 “A é idêntico a B” significa “o sinal de A e o sinal de B têm o mesmo conteúdo conceitual” (FREGE, 2009, p. 72).

9 “A igualdade desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos? Ou entre nomes ou sinais de objetos?” (FREGE, 2009, p. 129).

10 “Se as palavras são usadas de modo costumeiro, o que se pretende é falar de sua referência. Mas pode acontecer que se deseje falar das próprias palavras ou de seu sentido [...]. Temos, assim, sinais de sinais, ao se escrever, encerram-se as [tais] palavras entre aspas” (FREGE, 2009, p. 133-134).

11 “A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a ideia que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é subjetivo como a ideia, mas que também não é o próprio objeto” (FREGE, 2009, p. 134).

próprio expressa seu sentido [*expresses its meaning*] e designa ou se refere à sua referência [*indicates its indication*] (p. 31)¹².

Essa teoria da referência [*theory of indication*] é mais abrangente e geral que a minha, conforme se percebe do fato de que todo nome próprio [*proper name*] é suposto como tendo os dois aspectos [*two sides*]. Parece-me que somente de nomes próprios [*proper names*], como aqueles derivados de conceitos [*concepts*] por meio de artigo definido, pode se dizer que têm sentido [*meaning*], e palavras tais como John meramente se referem [*indicate*] sem terem sentido [*meaning*]. Caso alguém admita, como eu faço, que conceitos [*concepts*] podem ser objetos [*objects*] e que podem ter nomes próprios [*proper names*], parece bastante evidente que seus nomes próprios [*proper names*], via de regra, os referenciarão [*will indicate*] sem ter nenhum sentido distinto [*any distinct meaning*]; porém a perspectiva oposta, embora leve a um regresso ao infinito, não parece ser logicamente impossível. O restante da discussão deste ponto precisará ser adiado até chegarmos à teoria de Frege do *Begriffe* [conceito].

477. Valores de verdade [*truth-values*] e juízo [*judgment*]. O problema a ser discutido sob este tópico é o mesmo daquele levantado no § 52,¹³ a respeito da diferença entre proposições asseridas e não-asseridas [*between asserted and unasserted propositions*]. Mas a posição de Frege nesta questão é mais sutil que a minha e envolve uma análise mais radical do juízo [*judgment*]. Sua *Begriffsschrift* [Conceitografia], devido à ausência de distinção entre sentido [*meaning*] e referência [*indication*], oferece uma teoria mais simples que a de seus trabalhos posteriores. Eu a omitirei, portanto, das discussões.

Há, nos é dito (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. X), três elementos no juízo [*judgment*]: (1) o reconhecimento da verdade [*recognition of truth*]¹⁴, (2) o *Gedanke* [pensamento], (3) o valor de verdade (*Wahrheitswerth*) [*truth-value*]. Aqui, *Gedanke* [pensamento] é o que denominei de proposição não-asserida [*unasserted proposition*] – ou melhor, o que denominei por este nome abrange tanto o *Gedanke* [pensamento] sozinho quanto o *Gedanke* associado ao seu valor de verdade [*truth-value*]. Será proveitoso ter dois nomes para essas duas

12 “Um nome próprio (palavra, sinal, combinação de sinais, expressão) expressa seu sentido e designa ou refere-se à sua referência” (FREGE, 2009, p. 136).

13 Este é o aspecto lógico do problema da *Annahmen*, levantado por Meinong em seu hábil trabalho sobre o assunto, *Leipzig*, 1902. A parte lógica, embora não a parte psicológica, da obra de Meinong parece ter sido completamente antecipada por Frege (N.A.). Russell se refere ao artigo de mesmo nome escrito por Meinong.

14 Eis um tema que será longamente discutido por Deleuze-Guattari no capítulo “Prospectos e conceitos” de **O que é filosofia?**, o problema da “*reconhecimento do verdadeiro* nos prospectos ou nas proposições informativas”, especialmente a partir da p. 180; além das referências explícitas a Russell, uma adequada compreensão do que se trata exigiria a leitura da coletânea de textos de Frege, já traduzida para o português, também por Alcoforado, sob o título **O pensamento: uma investigação lógica. Investigações lógicas (1918-9)**, para mais informações cf. referências bibliográficas da nota introdutória.

noções distintas; chamarei o *Gedanke* sozinho de um conceito proposicional [*propositional concept*]; chamarei de suposição¹⁵ [*assumption*] o valor de verdade de um *Gedanke* [*truthvalue of a Gedanke*]. Ao menos formalmente, uma suposição [*assumption*] não exige que seu conteúdo seja um conceito proposicional [*propositional concept*]: para qualquer que seja x , “a verdade de x ” é uma noção definida. Isso se refere à verdade [*means the true*] se x é verdadeiro, e a proposição se refere à falsidade [*means the false*] se x é falso ou não (*Function und Begriff* [Função e conceito], p. 21)¹⁶. É semelhante, de acordo com Frege, com “a falsidade de x ”. Essas não são asserções e negações das proposições [*assertions and negations of propositions*], mas somente asserções de verdade ou de falsidade [*assertions of truth or of falsity*], isto é, negação pertence ao que é asserido [*negation belongs to what is asserted*] e não é o oposto de asserção¹⁷ [*assertion*]. Assim, temos primeiro um conceito proposicional [*propositional concept*], a seguir, sua verdade ou falsidade conforme seja o caso [*its truth or falsity as the case may be*] e, finalmente, a asserção da verdade ou falsidade [*the assertion of its truth or falsity*]. Assim, em um juízo hipotético, temos uma relação [*relation*], não de dois juízos [*judgments*], mas, sim, de dois conceitos proposicionais [*propositional concepts*] (*Ueber Sinn und Bedeutung* [Sobre o sentido e a referência], p. 43)¹⁸.

Essa teoria se conecta de modo bastante curioso com a teoria do sentido e referência [*theory of meaning and indication*]. Considera-se que toda suposição [*assumption*] se refere [*indicates*] à verdade ou à falsidade (as quais se denomina valores de verdade [*truth-values*]), enquanto seu sentido indica [*means*] o conceito proposicional correspondente. A suposição [*assumption*] “ $2^2 = 4$ ” se refere [*indicates*] à verdade, nos é dito, assim como “2” se refere [*indicates*] a 4 (*Function und Begriff* [Função e conceito], p. 13; *Ueber Sinn und Bedeutung* [Sobre o sentido e a referência], p. 32)^{19 20}. Em uma oração subordinada [*dependent clause*] ou onde ocorre um nome (como Odisseu) que não se refere a nada [*indicates nothing*], a sentença pode não ter referência [*no indication*]; mas quando a sentença tem um valor de verdade [*truth-value*], este é a sua referência [*indication*].

15 Frege, como Meinong, denomina-o de *Annahmen*: [cf.] *Function und Begriff* [Função e conceito], p. 21 (N.A.).

16 “Como uma tal função [que tenha por argumento um valor de verdade], temos convencionado [a regra de] que o valor dessa função deva ser o verdadeiro se o verdadeiro for tomado como argumento, enquanto que o valor será o falso em todos os demais casos, a saber, quando o argumento for o falso ou quando ele não for um valor de verdade” (FREGE, 2009, p. 98-99).

17 *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. 10. Conferir também *Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 4 (N.A.).

18 “É, em geral, incorreto dizer que no juízo hipotético dois juízos se inter-relacionam. [...] O que cabe ser dito é que ‘num pensamento hipotético dois pensamentos se inter-relacionam’ (FREGE, 2009, p. 149-150).

19 “Consequentemente, ‘ $2^2 = 4$ ’, por exemplo, refere-se ao verdadeiro, tal como, digamos, ‘2’ se refere a 4” (FREGE, 2009, p. 92).

20 Quando se fala, com o referente [*term which indicates*], dele próprio, em oposição àquilo a que ele se refere [*what it indicates*], Frege usa aspas. Conferir, § 56 (N.A.).

Assim, toda sentença assertiva [*assertive sentence*] (*Behauptungssatz*) é um nome próprio [*proper name*], que se refere [*indicates*] ao verdadeiro ou ao falso (*Ueber Sinn und Bedeutung* [Sobre o sentido e a referência], pp. 32-4²¹; *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p.7). O sinal de juízo [*sign of judgment*] (*Urtheilstrich*) não se combina com outros sinais [*signs*] para denotar um objeto [*to denote an object*]; um juízo [*judgment*] não se refere a nada [*indicates nothing*], mas asseire algo [*asserts something*]. Frege possui um símbolo especial para juízo [*symbol for judgment*], que é algo distinto e adicional ao valor de verdade [*truth-value*] de um conceito proposicional [*propositional concept*]. (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. 9-10)²².

478. Existem algumas dificuldades na teoria acima, sobre as quais será proveitoso discutir. Em primeiro lugar, parece controverso se a introdução de valores de verdade [*truth-values*] assinala qualquer análise real [*any real analysis*]. Se considerarmos, digamos, “César morreu”, pareceria que o que é asserido [*is asserted*] é o conceito proposicional [*propositional concept*] “a morte de César” e não “a verdade da morte de César”. Este último parece ser apenas outro conceito proposicional [*propositional concept*], asserido [*asserted*] na proposição “a morte de César é verdadeira”, que não é, penso eu, a mesma proposição que “César morreu”. Existe aqui grande dificuldade em evitar elementos psicológicos, e parece que Frege lhes permitiu a intromissão ao descrever o juízo como o reconhecimento da verdade [*judgment as the recognition of truth*] (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. X). A dificuldade se deve ao fato de haver uma acepção psicológica na asserção [*psychological sense of assertion*], que é o que está ausente no *Annahmen* [*assumption/suposição*] de Meinong, e que não apresenta paralelo com a acepção lógica [*the logical sense*]. Na acepção psicológica [*psychologically*], qualquer proposição, seja verdadeira ou falsa, pode ser simplesmente pensada ou pode ser, de fato, asserida [*asserted*]: contudo, neste caso o erro seria impossível. Mas, na acepção lógica [*logically*], proposições verdadeiras só podem ser asseridas [*true propositions only are asserted*], embora elas possam ocorrer em uma forma não-asserida [*unasserted form*], como parte de outras proposições. Em “*p* implica *q*”, cada uma das ou

21 “Toda sentença assertiva, caso importe a referência de suas palavras, deve ser considerada como um nome próprio; e sua referência, se tiver uma, é ou o verdadeiro ou o falso” (FREGE, 2009, p. 138).

22 Russell se refere aqui ao traço de juízo ‘|’ (*Urtheilstrich*), sinal utilizado no simbolismo fregeano para indicar que o conteúdo da proposição que se segue está sendo asserido; e.g., no juízo $| - 2 + 2 = 4$, o que se segue ao traço horizontal indica o conteúdo proposicional desse juízo e ao traço vertical que o antecede indica que tal conteúdo está sendo asserido. No mesmo sentido, Alcoforado comenta: “O termo por Frege empregado para designar o sinal ‘|’ é *Urtheilstrich*, que literalmente significa ‘traço de juízo’. No presente artigo [Função e conceito], ele não mais se utiliza dessa designação, mas da palavra *Senkrecht*, ‘o [traço] vertical’. Este sinal associado ao traço de conteúdo ‘-’ dá origem ao sinal ‘|-’, que aparece pela primeira vez em sua *Begriffsschrift*, § 2, e para o qual Frege nunca reservou um nome especial. Mais tarde, Whitehead e Russell vieram a denominar o símbolo ‘|-’ de ‘sinal de asserção’, designação pela qual esse sinal é hoje universalmente conhecido” (FREGE, 2009, p. 101).

ambas as proposições *p*, *q* podem ser verdadeiras, ainda que cada qual, nesta proposição, esteja não-asserida [*is unasserted*] em uma acepção lógica e não meramente em uma acepção psicológica [*in a logical, and not merely in a psychological, sense*]. Assim, a asserção [*assertion*] tem um lugar definido entre as noções lógicas [*logical notions*], embora haja uma noção psicológica de asserção à qual nada de lógico corresponde [*corresponds*]. Mas asserção [*assertion*] não parece ser constituinte [*constituent*] de uma proposição asserida [*asserted proposition*], embora esteja, em certa medida [*in some sense*], contida na proposição asserida [*asserted proposition*]. Se *p* é uma proposição, “a verdade de *p*” é um conceito [*concept*] que tem existência [*which has being*], mesmo que *p* seja falso, e assim “a verdade de *p*” não é o mesmo que *p* asserido [*asserted*]. Assim, nenhum conceito [*concept*] que equivalha a *p* asserido pôde ser encontrado e, portanto, a asserção [*assertion*] não é um constituinte em *p* asserido [*a constituent in p asserted*]. Ainda que asserção [*assertion*] não seja um termo [*term*] com o qual *p*, quando asserido [*asserted*], mantenha relação externa [*external relation*]; pois qualquer relação deste tipo precisaria ser ela própria asserida [*asserted*] para resultar no que desejamos. Uma dificuldade surge também devido ao suposto fato – acerca do qual se pode, no entanto, duvidar – de que uma proposição asserida [*asserted proposition*] nunca pode ser parte de outra proposição: assim, se isso for um fato, sempre que qualquer afirmação [*statement*] for realizada a respeito do *p* asserido [*p asserted*], ela não é de fato a respeito do *p* asserido [*p asserted*], mas apenas sobre a asserção de *p* [*assertion of p*]. Essa dificuldade se torna grave no caso do único princípio de inferência de Frege [*principle of inference*] (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 9): “*p* é verdadeiro e *p* implica *q*; portanto, *q* é verdadeiro”²³. Aqui é absolutamente essencial que haja realmente três asserções [*three actual assertions*], caso contrário a asserção [*assertion*] das proposições deduzidas das premissas asseridas [*asserted premises*] seria impossível; entretanto, as três asserções [*assertions*] juntas formam uma proposição, cuja unidade é evidenciada pela palavra *portanto*, sem a qual *q* não teria sido deduzido [*deduced*], e sim teria sido asserido [*asserted*] como uma nova premissa.

Também é quase impossível, ao menos para mim, separar asserção e verdade [*divorce assertion from truth*] como Frege faz. Uma proposição asserida [*asserted proposition*], ao que parece, deve ser o mesmo que uma proposição verdadeira. Podemos admitir que a negação pertença ao conteúdo da proposição [*that negation belongs to the content of a proposition*] (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 4) e considerar toda asserção como asserindo [*assertion as asserting*] algo como verdade. Tomaremos como correlato [*We shall then correlate*] então *p* e não-*p* como

23 Conferir supra, § 18, (4) e § 38 (N.A.).

proposições não-asseridas [*unasserted propositions*], e consideraremos “*p* é falso” como tendo o sentido de [*meaning*] “não-*p* é verdadeiro”. Mas separar asserção e verdade [*to divorce assertion from truth*] só parece possível tomando a asserção [*assertion*] em sua acepção psicológica [*psychological sense*].

479. A teoria de Frege de que suposições [*assumptions*] são nomes próprios [*proper names*] para verdadeiro e falso, conforme o caso, parece-me do mesmo modo insustentável. Um exame direto [*Direct inspection*] parece mostrar que a relação entre uma proposição e o verdadeiro ou o falso é bem diferente daquela entre (digamos) “o atual Rei da Inglaterra” e Eduardo VII. Além disso, se a perspectiva de Frege estivesse correta nesse ponto, nós teríamos de sustentar que em uma proposição asserida [*asserted proposition*] é o sentido [*meaning*] e não a referência [*indication*] que é asserido [*asserted*], pois, do contrário, todas as proposições asseridas asseririam [*asserted propositions would assert*] exatamente a mesma coisa [*the very same thing*], nomeadamente, o verdadeiro (uma vez que proposições falsas não são asseridas [*are not asserted*]). Assim, proposições asseridas [*asserted propositions*] não difeririam umas das outras de forma alguma, mas seriam todas estrita e simplesmente idênticas [*identical*]. Proposições asseridas [*asserted propositions*] não possuem referência [*indication*] (*Function und Begriff* [Função e conceito], p. 21), e podem somente diferir, se é que diferem, de algum modo análogo ao sentido [*meaning*]. Portanto, o sentido da proposição não-asserida [*meaning of the unasserted proposition*] junto com seu valor de verdade [*truth-value*] deve ser o que é asserido [*asserted*], se o sentido [*meaning*] for simplesmente rejeitado. Mas parece sem propósito introduzir valor de verdade [*truth-value*] aqui: parece ser suficiente dizer que uma proposição asserida é aquela cujo sentido é verdadeiro [*an asserted proposition is one whose meaning is true*], e dizer que o sentido verdadeiro [*meaning is true*] é o mesmo que dizer que o sentido é asserido [*meaning is asserted*]. Podemos então concluir que proposições verdadeiras, até mesmo quando elas ocorrem como partes de outras, são sempre e essencialmente asseridas [*always and essentially asserted*], enquanto que proposições falsas são sempre não-asseridas [*unasserted*], evitando, assim, a dificuldade quanto ao *portanto* discutida acima²⁴. É possível também objetar a Frege que “o Verdadeiro” e “o Falso”, em oposição à verdade e à falsidade, não denotam coisas singulares definidas [*do not denote single definite things*], mas antes a classe de proposições verdadeiras e falsas [*the classes of true and false propositions*] respectivamente. Esta objeção, no entanto, seria solucionada pela sua teoria do percurso [de valor],

24 No §478.

o qual corresponde aproximadamente às minhas classes [*classes*]; a verdade e a falsidade, diz ele, são coisas [*things*], e o verdadeiro e o falso são percursos (v. *inf.*).

480. *Begriff* [Conceito] e *Gegenstand* [objeto]. Funções [*functions*]. Chego agora a um ponto em que o trabalho de Frege é muito importante e demanda um exame cuidadoso. Seu uso da palavra *Begriff* subject[conceito] não corresponde exatamente à noção alguma em meu vocabulário, embora se aproxime bastante da noção de asserção [*assertion*] como definida no §43, e discutida no capítulo 7. Por outro lado, seu *Gegenstand* [objeto] parece corresponder exatamente àquilo que denominei uma coisa [*what I have called a thing*] (§ 48). Devo assim traduzir *Gegenstand* [objeto] por coisa [*thing*]. O significado do nome próprio [*the meaning of proper name*] parece ser para ele o mesmo que é para mim, mas ele considera o percurso [de valor] dos nomes próprios [*proper names*] como restrito às coisas [*confined to things*], porque apenas eles, em sua opinião, podem ser sujeitos lógicos [*logical subjects*].

A teoria fregeana das funções e do *Begriffe* [conceito] é apresentada com simplicidade em *Function und Begriff* [Função e conceito], e defendida contra as críticas de Kerry²⁵ em *Ueber Begriff und Gegenstand* [Sobre conceito e objeto]. Ele [Frege] considera funções [*functions*] – e quanto a isso concordo com ele – como mais fundamentais que predicados e relações; mas ele adota, a respeito de funções, a teoria do sujeito e da asserção que discutimos e rejeitamos no capítulo 7. A aceitação dessa perspectiva confere uma simplicidade à sua exposição que fui incapaz de atingir; contudo, não encontro nada em seu trabalho para me persuadir da legitimidade de sua análise.

Uma função Aritmética, por exemplo, $2x^3 + x$, não denota [*denote*], afirma Frege, o resultado de uma operação Aritmética, pois isso se trata meramente de um número, o que não traria nada de novo (*Function und Begriff* [Função e conceito], p. 5)²⁶. A essência da função é o que resta quando o x é descartado, isto é, no exemplo acima, $2 ()^3 + ()$. O argumento x não pertence à função, mas os dois compõem um todo completo (*ib.*, p. 6)²⁷. Uma função pode ser uma proposição para todo valor da variável; seu valor é, então, sempre um valor de verdade [*truth-value*] (p. 13)²⁸. Uma proposição pode ser dividida em duas partes, como em “César” e “conquistou a Gália”. A primeira, Frege denomina de argumento [*argument*] e a última, denomina de função [*function*].

25 *Vierteljahrschrift für wiss. Phil.*, vol. XI, pp. 249-307 (N. A.).

26 “Assim, se a função nada mais fosse que a referência de uma expressão de cálculo, ela seria apenas um número e nada traria de novo para a aritmética” (FREGE, 2009, p. 84-85).

27 “Importa mostrar que o argumento não é parte da função, mas que compõe juntamente com a função um todo completo” (FREGE, 2009, p. 86).

28 “A primeira pergunta que aqui surge é quais são os valores desta função para diferentes argumentos. [...] Assim, digo: ‘o valor de nossa função é um valor de verdade’” (FREGE, 2009, p. 91-92).

Qualquer coisa é um argumento possível [*possible argument*] para uma função [*function*] (p. 17)²⁹ (essa divisão das proposições corresponde exatamente à minha divisão em sujeito [*subject*] e asserção [*assertion*], como explicados no §43, mas Frege não restringe esse método de análise como eu faço no capítulo 7). Uma coisa é qualquer coisa que não seja uma função [*function*], isto é, cuja expressão não deixa espaço vazio. As duas descrições seguintes a respeito da natureza da função [*function*] são citadas a partir do mais antigo e de um dos mais novos trabalhos de Frege respectivamente:

1. “Se, em uma expressão, cujo conteúdo não precisa ser proposicional (*beurtheilbar*), um sinal simples ou composto [*a simple or composite sign*] ocorre em um ou mais lugares, e se o pensarmos como substituível [*replaceable*] por outro [sinal] [*by something else*], mas sempre substituível pela mesma expressão em todos ou em algum desses lugares, então denominamos de função [*function*] a parte da expressão [*the part of the expression*] invariável neste processo e denominamos argumento a parte substituível [*replaceable part*]” (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 16)³⁰.
2. “Se, de um nome próprio, excluirmos um nome próprio [*from a proper name we exclude a proper name*], do qual é parte ou todo do primeiro, em alguns ou todos os lugares em que ocorre, mas de tal modo que estes lugares permaneçam reconhecíveis como apropriados a serem preenchidos por um e o mesmo nome próprio arbitrário [*by one and the same arbitrary proper name*] (como as posições dos argumentos do primeiro tipo [*as argument positions of the first kind*]), denomino o que nós assim obtemos de o nome de uma função de primeira ordem com um argumento [*the name of a function of the first order with one argument*]. Tal nome, juntamente com um nome próprio [*proper name*] que preenche os lugares dos argumentos [*argument-places*], forma um nome próprio [*proper name*]” (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. 44).

A segunda definição pode se tornar mais clara com o auxílio de alguns exemplos. “O atual Rei da Inglaterra” é, de acordo com Frege, um nome próprio [*proper name*] e “Inglaterra” é um nome próprio [*proper name*] que dele faz parte. Assim, aqui podemos considerar Inglaterra como o argumento [*argument*] e “o atual Rei” como função [*function*]. Assim, somos levados a “o atual Rei de x”. Essa expressão sempre terá um sentido [*a meaning*], mas não terá uma referência [*an*

29 “Devemos ir ainda mais adiante e admitir [quaisquer] objetos, sem restrição, como valores de função” (FREGE, 2009, p. 95).

30 “Se, em uma expressão, cujo conteúdo não precisa ser asserível, um sinal simples ou composto ocorre em um ou mais lugares, e se o pensarmos como substituível por outro [sinal], mas sempre substituível pela mesma expressão em todos ou em algum desses lugares, então chamamos de função a parte invariável da expressão e chamamos de argumento a parte substituível” (FREGE, 2012, p. 73).

indication] exceto para aqueles valores de x que são atualmente monarquias. A função acima não é proposicional. Mas “César conquistou a Gália” conduz a “ x conquistou a Gália”; aqui nós temos uma função proposicional [*propositional function*]. Aqui, existe um pequeno detalhe a ser notado: a proposição asserida [*asserted proposition*] não é um nome próprio [*proper name*], mas somente a suposição [*assumption*] é um nome próprio [*proper name*] para o verdadeiro ou o falso (v. supra); assim, não é “César conquistou a Gália” que é asserido [*as asserted*], mas somente a suposição [*assumption*] correspondente que está envolvida na gênese de uma função proposicional [*propositional function*]. De fato, isto é suficientemente óbvio, uma vez que queremos que x seja capaz de ser qualquer coisa em “ x conquistou a Gália”, enquanto que não existe tal proposição asserida [*asserted proposition*] exceto quando x efetivamente realiza esse feito. Novamente, considere “Sócrates é homem implica [*implies*] que Sócrates é mortal”. De acordo com Frege, isto (não asserido [*unasserted*]) é um nome próprio para o verdadeiro [*a proper name for the true*]. Ao variar o nome próprio “Sócrates”, podemos obter três funções proposicionais [*propositional functions*], nomeadamente, “ x é um homem implica que Sócrates é mortal”, “Sócrates é um homem implica que x é mortal”, “ x é um homem implica que x é mortal”. Dessas, a primeira e a terceira são verdadeiras para todos os valores de x , a segunda é verdadeira se e somente se x é um mortal.

Ao suprimir de modo semelhante um nome próprio [*a proper name*] no nome de uma função de primeira ordem com um argumento [*the name of a function of the first order with one argument*], nós obtemos o nome de uma função de primeira ordem com dois argumentos [*the name of a function of the first order with two arguments*] (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. 44). Assim, por exemplo, partindo de “ $1 < 2$ ”, nós temos primeiro “ $x < 2$ ”, que é o nome de uma função de primeira ordem com um argumento [*the name of a function of the first order with one argument*] e, então, “ $x < y$ ”, que é o nome de uma função de primeira ordem com dois argumentos [*the name of a function of the first order with two arguments*]. Ao suprimir uma função de modo semelhante, diz Frege, obtemos o nome de uma função de segunda ordem [*the name of a function of the second order*] (*Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], p. 44). Portanto, por exemplo, a asserção de existência [*assertion of existence*] em uma acepção matemática é uma função de segunda ordem [*function of the second order*]: “Existe pelo menos um valor de x satisfazendo ϕx ” não é a função de x [*function of x*], mas pode ser considerado como uma função de ϕ [*function of ϕ*]. Aqui, é preciso que, sob nenhuma circunstância, ϕ seja uma coisa [*a thing*], mas ele pode ser qualquer função [*any function*]. Assim, essa proposição, considerada como uma função de ϕ [*function of ϕ*], é notadamente diferente de funções de primeira ordem [*functions*

of the first order], pelo fato de que os argumentos possíveis são diferentes. Desse modo, dada qualquer proposição, digamos $f(a)$, nós podemos considerar ou $f(x)$, a função de primeira ordem [*function of the first order*] resultante da variação de a , tendo mantido f constante, ou $\phi(a)$, a função de segunda ordem [*function of the second order*] que se obtém ao variar f tendo mantido a fixo; ou, finalmente, nós podemos considerar $\phi(x)$, na qual tanto f quanto a variam separadamente. (Deve ser observado que tais noções como $\phi(a)$, na qual nós consideramos qualquer proposição concernente a a , estão compreendidas no [princípio da] identidade de indiscerníveis [*identity of indiscernibles*] da maneira que foi tratado em § 43.) Funções de primeira ordem com duas variáveis [*functions of the first order with two variable*], aponta Frege, expressam relações [*express relations*] (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 17); o referente [*referent*] e o *relatum* são ambos sujeitos numa proposição relacional [*subjects in a relational proposition*] (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 82)³¹. Relações, tanto quanto predicados, pertencem, Frege diz corretamente, à lógica pura (*ib.* p. 83)³².

481. A palavra *Begriff* [conceito] é usada por Frege querendo dizer quase o mesmo que função proposicional [*propositional function*] [(e.g. *Function und Begriff* [Função e conceito], p. 28)³³ ³⁴; quando existem duas variáveis, o *Begriff* [conceito] é uma relação. Uma coisa [*a thing*] é tudo o mais que não seja uma função, isto é, qualquer coisa cuja expressão [*expression*] não deixa qualquer espaço vazio³⁵ (*ib.*, p. 18). À teoria de Frege da distinção essencial entre coisas [*things*] e *Begriffe* [conceitos], Kerry objeta (*loc. cit.* p. 272 ff.) que *Begriffe* [conceitos] podem também ocorrer como sujeitos [*occur as subjects*]. Quanto a isso, Frege elabora duas respostas. Em primeiro lugar, existe, diz ele, uma importante distinção devido a qual alguns termos só podem ocorrer como sujeitos [*some terms can only occur as subjects*], enquanto outros podem ocorrer também como conceitos [*can occur also as concepts*], mesmo se *Begriffe* [conceitos] também possam ocorrer como sujeitos [*as subjects*] (*Ueber Begriff und Gegenstand* [Sobre conceito e objeto], p. 195). Nisso concordo com ele inteiramente; a distinção é aquela empregada nos §§ 48 e 49. Porém, ele segue

31 “Cada par de objetos coordenados está – poder-se-ia dizer, como sujeito – para o conceito relacional como cada objeto está para o conceito sob o qual cai. O sujeito é aqui composto.” (FREGE, 1983, p. 256).

32 “O conceito relacional pertence, pois, como o simples, à lógica pura” (FREGE, 1983, p. 256).

33 Temos aqui uma função [*function*] cujo valor é sempre um valor de verdade [*truth-value*]. Funções assim com um argumento [*such functions with one argument*], denominamos *Begriffe* [conceito]; com dois, denominamos relações”. Conferir *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], pp. 82-3 (N. A.).

34 “Vemos assim quão estreitamente ligado está o que se chama, em lógica, de conceito com o que nós chamamos de função. Com efeito, pode-se dizer imediatamente: um conceito é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade. (FREGE, 2009, p. 93).

35 “Um objeto é tudo o que não é função, tudo aqui cuja expressão não contém lugar vazio” (FREGE, 2009, p. 96).

para um segundo ponto, quanto ao qual, para mim, ele parece se enganar. Podemos, diz ele, ter um conceito caindo sob um de nível superior [*a concept falling under a higher one*] (como Sócrates cai sob homem, ele quer dizer, e não como grego cai sob homem); mas, em tais casos, não é o próprio conceito [*concept*], mas seu nome, que está em questão (*Ueber Begriff und Gegenstand* [*Sobre conceito e objeto*], p. 195). “O conceito cavalo”, diz ele, não é um conceito [*concept*], mas uma coisa [*thing*]; o uso peculiar é indicado pelas aspas (*ib.* p. 196). Mas poucas páginas adiante ele faz afirmações que parecem envolver uma perspectiva diferente. Um conceito [*concept*], diz ele, é essencialmente predicativo mesmo quando algo é asserido acerca dele [*essentially predicative even when something is asserted of it*]: uma asserção [*an assertion*] que pode ser feita sobre um conceito [*a concept*] não se adequa a um objeto [*does not fit an object*]. Quando se diz de uma coisa que ela cai sob um conceito [*a thing is said to fall under a concept*], e quando se diz de um conceito que ele cai sob um conceito de nível superior [*a concept is said to fall under a higher concept*], as duas relações envolvidas, embora similares, não são as mesmas (*ib.* p. 201). É difícil para mim conciliar essas observações com aquelas da p. 195 [de *Sobre conceito e objeto*]; mas devo retornar a este ponto brevemente.

Frege reconhece a unidade de uma proposição [*the unity of a proposition*]: das partes de um conceito proposicional [*propositional concept*], diz ele, nem todas podem ser saturadas [*complete*], mas ao menos uma deve ser insaturada (*ungesättigt*) [*incomplete*] ou predicativa, de outro modo, as partes não iriam se combinar [*would not cohere*] (*ib.* p. 205). Ele reconhece também, embora não discuta, as peculiaridades resultantes de *algum* e *todo* e palavras desse tipo [*any and every and such words*]: deste modo, ele observa que todo número inteiro é a soma de quatro quadrados, mas “todo inteiro positivo” não é um valor possível [*a possible value*] para *x* em “*x* é a soma de quatro quadrados”. O sentido [*meaning*] de “todo inteiro positivo”, diz ele, depende do contexto (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 17)³⁶ – uma observação que é, sem dúvida, correta, mas não exaure o assunto. Noções autocontraditórias [*self-contradictory notions*] são admitidas como conceitos [*concepts*]: *F* é um conceito [*concepts*] se “*a* cai sob o conceito *F*” é uma proposição independentemente de que coisa [*thing*] *a* possa ser (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 87)³⁷. Um conceito é a referência [*a concept is the indication*] de um predicado; uma coisa [*thing*] é o que nunca pode ser a referência total [*whole indication*] de um predicado, embora

36 “A expressão ‘todo número inteiro positivo’, por si mesma, não propicia – diferentemente da [expressão] ‘o número 20’ – uma ideia independente; pelo contrário, ela só adquire um sentido no contexto de uma proposição (*Satz*)” (FREGE, 2012, p. 73).

37 “Emprego a palavra ‘conceito’ de maneira a ser ‘*a* cai sob o conceito *F*’ a forma geral de um conteúdo judicável que trate de um objeto *a* e permaneça judicável substituindo-se *a* pelo que quer que seja.” (FREGE, 1983, p. 258-259).

possa ser a referência total de um sujeito (*Ueber Begriff und Gegenstand* [Sobre o conceito e o objeto. p. 198]³⁸.

482. A teoria acima, a despeito da estreita semelhança, difere em alguns pontos importantes da teoria apresentada na Parte I [dos *Princípios da matemática*] acima. Antes de examinar as diferenças, devo recapitular brevemente minha própria teoria.

Dado qualquer conceito proposicional [*propositional concept*], ou qualquer unidade [*unity*] (ver § 136), que possa no limite ser simples, seus constituintes são no geral de duas espécies [*two sorts*]: (1) aqueles que podem ser substituídos por algum outro qualquer [*anything else whatever*] sem que com isso se destrua a unidade do todo [*unity of the whole*]; (2) aqueles que não têm essa propriedade. Assim, em “a morte de César”, algum outro [*anything else*] pode substituir *César*, mas um nome próprio [*proper name*] não pode substituir *morte*, e dificilmente alguma coisa conseguirá substituir *de*. Da unidade em questão, a primeira classe de constituintes³⁹ [*the former class of constituents*] será denominada termos [*terms*], a última, conceitos [*concepts*]. Teremos então que, acerca de qualquer unidade, considerar as seguintes questões:

2. O que permanece da dita unidade [*unity*] – quando um dos termos [*terms*] é simplesmente removido; ou, se o termo ocorre diversas vezes, quando ele é removido de uma ou mais posições em que ele ocorre; ou, se a unidade tem mais de um termo, quando dois ou mais de seus termos são removidos de algumas ou de todas as posições em que eles ocorrem – é o que Frege denomina função [*function*].
3. A classe de unidades que se distingue da dita unidade – se é que se distingue – ou pelo fato de um de seus termos [*terms*] ter sido substituído por algum outro termo [*term*] em uma ou mais das posições em que ele ocorre; ou pelo fato de dois ou mais de seus termos [*terms*] terem sido assim substituídos por outros termos [*terms*].
4. Qualquer membro da classe [*member of the class*] (2).
5. A asserção [*assertion*] de que todo membro da classe [*member of the class*] (2) é verdadeira.
6. A asserção [*assertion*] de que algum membro da classe [*member of the class*] (2) é verdadeira.
7. A relação de um membro da classe [*member of the class*] (2) com o valor que a variável assume neste membro [*member*].

38 “[...] um conceito é a referência de um predicado, enquanto que um objeto é o que nunca pode ser a referência total de um predicado, embora possa ser a referência de um sujeito.” (FREGE, 2009, p. 118).

39 Para explicação sobre a designação ‘termo’, conferir nota 03 da presente tradução.

O caso fundamental é aquele no qual nossa unidade é um conceito proposicional [*where our unity is a propositional concept*]. A partir disso, deriva-se a noção matemática usual de função [*function*], que podia parecer mais simples à primeira vista. Se $f(x)$ não é uma função proposicional [*propositional function*], seu valor para um dado valor de x ($f(x)$ assumida como monovalente [*one-valued*]) é o termo y que satisfaz a função proposicional [*propositional function*] $y = f(x)$, isto é, que satisfaz, para o valor dado de x , alguma proposição relacional [*relational proposition*]; essa proposição relacional [*relational proposition*] está compreendida na definição de $f(x)$ e uma tal função proposicional [*some such propositional function*] é exigida na definição de qualquer função que não seja proposicional.

Com respeito a (1), restringindo-nos a uma variável, foi sustentado no capítulo 7 que, exceto quando a proposição a partir da qual começamos é predicativa ou, do contrário, quando asserir uma relação fixa para um termo fixo [*asserts a fixed relation to a fixed term*], não há entidade alguma [*entity*]: [nesse caso], a análise entre argumento e asserção [*argument and assertion*] não pode ser empreendida da maneira exigida. Assim, o que Frege denomina função [*function*], se nossa conclusão for segura, é, em geral, uma não-entidade [*a non-entity*]. Outro ponto de discordância com Frege, no qual, no entanto, ele parece estar com a razão, consiste no fato de eu não situar restrição alguma na variação da variável [*variation of the variable*], enquanto que Frege, conforme a natureza da função [*function*], restringe a variável a coisas [*variable to things*], a funções de primeira ordem com uma variável [*functions of the first order with one variable*], a funções de primeira ordem com duas variáveis [*functions of the first order with two variables*], a funções de segunda ordem com uma variável [*functions of the second order with one variable*] e assim sucessivamente. Há para ele, portanto, um número infinito de diferentes tipos de variação [*infinite number of different kinds of variability*]. Isso surge do fato de que ele considera como distintos o conceito ocorrendo como tal [*concept occurring as such*] e o conceito ocorrendo como termo [*concept occurring as term*], o que eu (§ 49) não distingui. Para mim, as funções [*functions*], que não podem ser valores de variáveis em funções de primeira ordem [*values of variables in functions of the first order*], são não-entidades [*non-entities*] e abstrações falsas [*false abstractions*]. Em vez do refugio [da noção] de uma proposição considerada em (1), substituo ou (2) ou (3) ou (4) de acordo com as circunstâncias. O fundamento para considerar como nem sempre possível a análise em argumento e função [*the analysis into argument and function*] é que, quando um termo [*one term*] é removido de uma proposição conceitual [*propositional concept*], o restante está apto a não ter qualquer espécie de unidade [*sort of unity*], mas a se desmembrar em um conjunto de termos

desarticulados. Assim, o que é fundamental em tal caso é (2). É possível mostrar a inadequação da definição geral de Frege para função [*function*], que pretende abranger também funções não proposicionais [*functions which are not propositional*], ao considerar o que pode ser denominado de função de identidade [*identical function*], isto é, x como função de x . Se seguirmos o conselho de Frege, e removermos o x esperando ter a função [*function*] no que restar, descobrimos que absolutamente nada restou; no entanto, nada não pode ser o sentido [*the meaning*] da função de identidade [*identical function*]. Frege pretende manter espaços vazios para indicar de algum modo [*indicated in some way*] o lugar do argumento a ser inserido; assim, ele afirma que em $2x^3 + x$ a função é $2()^3 + ()$. Mas aqui sua exigência que os dois espaços vazios sejam preenchidos pela mesma letra não pode ser indicada [*indicated*]: não há meio de distingui-la do sentido [*mean*] que damos à função envolvida em $2x^3 + y$. O fato parece ser que queremos a noção de qualquer termo de uma certa classe [*any term of a certain class*], e é isso que nosso espaço vazio representa. A função [*function*], como uma entidade singular [*single entity*], é a relação (6) acima; podemos considerar então qualquer *relatum* dessa relação ou a asserção de todos ou alguns [*assertion of all or some*] dos *relata*, e qualquer relação pode ser expressa [*expressed*] nos termos do *referente* correspondente [*corresponding referent*], como em “Sócrates é homem” é expresso em termos de Sócrates. Mas o aparato formal usual dos cálculos de relações não pode ser empregado, porque ele pressupõe funções proposicionais [*propositional functions*]. Podemos dizer que uma função proposicional [*propositional function*] é uma relação muitos-um [*many-one relation*] que tem todos os termos [*all terms*] para a classe de seus referentes [*class of its referents*], e que tem seu *relata* contido entre proposições⁴⁰; ou, se preferirmos, podemos denominar as classes [*class*] de *relata* de uma tal relação como função proposicional [*propositional function*]. Mas a aparência de definição formal [*the air of formal definition*] quanto a essas afirmações é falaciosa, uma vez que funções proposicionais [*propositional functions*] são pressupostas para definir a classe dos referentes [*class of referents*] e de *relata* de uma relação.

Assim, a partir de funções proposicionais [*propositional functions*], proposições são reunidas em classes [*collected into classes*] (essas classes não são mutualmente excludentes [*not mutually exclusive*]). Mas podemos também reuni-las em classes [*collect them into classes*] a partir dos termos [*terms*] que nelas ocorrem: todas as proposições contendo um dado termo irão formar uma classe [*class*]. Nesse sentido, obtemos proposições relativas a funções proposicionais variáveis [*variable propositional functions*]. Na notação $\phi(x)$, o ϕ é essencialmente variável [*essentially*

40 Nem todas as relações [*relations*] que têm essa propriedade [*property*] são funções proposicionais [*propositional functions*]; v. *inf* (N.A.).

variable]; se desejamos que ele assim não o seja, devemos tomar alguma proposição particular acerca de x , tal como “ x é uma classe” [“ x is a class”] ou “ x implica x ” [“ x implies x ”]. Assim, $\phi(x)$ essencialmente contém duas variáveis. Mas se decidirmos que ϕ não é uma entidade separável [*separable entity*], não podemos considerar o próprio ϕ como segunda variável. Será necessário tomar como nossa variável ou a relação de x para $\phi(x)$ ou, senão, a classe de proposições [*class of propositions*] $\phi(y)$ para diferentes valores de y , mas para ϕ constante. Isso não é relevante formalmente, mas é importante para a lógica ser clara quanto ao significado [*the meaning*] do que aparece como a variação de ϕ . Obtemos, deste modo, outra divisão de proposições em classes [*division of propositions into classes*], mas novamente essas classes não são mutualmente excludentes [*mutually exclusive*].

Da maneira acima, pareceria que podemos fazer uso de funções proposicionais [*propositional functions*] sem termos que introduzir os objetos que Frege denomina funções [*objects which Frege calls functions*]. É de se observar, no entanto, que o tipo de relação a partir da qual funções proposicionais são definidas é menos geral que a classe de relações muitos-um [*class of many-one relations*], tendo seu domínio coextensivo [*domain coextensive*] aos termos e seu contradomínio [*converse domain*] contido nas proposições. Pois, nesse sentido, qualquer proposição seria, em uma relação adequada, o *relatum* de qualquer termo, enquanto que o termo que é o referente [*referent*] deve, para uma função proposicional [*propositional function*], ser um constitutivo da proposição que é seu *relatum*⁴¹. Esse ponto ilustra novamente que a classe de relações envolvida é fundamental e não pode ser definida. Mas também parece mostrar que os diferentes tipos de variação [*different kinds of variability*] de Frege são incontornáveis, pois ao considerar (digamos) $\phi(2)$, onde ϕ é variável, a variável teria de ter como seu percurso [de valor] [*range*] a classe de relações acima [*class of relations*], que podemos denominar relações proposicionais [*propositional relations*]. De outra forma, $\phi(2)$ não é uma proposição, e, de fato, não tem significação [*is indeed meaningless*], pois estamos lidando com um indefinível [*indefinable*], o que demanda que $\phi(2)$ deva ser o *relatum* de 2 no que diz respeito a alguma relação proposicional [*propositional relation*]. A contradição discutida no capítulo 10 parece evidenciar que algum mistério espreita na variação de funções proposicionais [*variation of propositional functions*]; mas, no momento, a teoria de Frege de diferentes tipos de variáveis [*theory of different kinds of variables*] deve, penso eu, ser aceita.

41 A noção de constituinte de uma proposição [*notion of a constituent*] parece ser um indefinível lógico [*logical indefinable*] (N. A.).

483. Resta discutir novamente a questão se conceitos [*concepts*] podem ser convertidos em sujeitos lógicos [*logical subjects*] sem perda do sentido [*without change of meaning*]. A teoria de Frege, segundo a qual, quando o conceito parece fazê-lo, é na verdade o nome do conceito [*name of the concept*] que está envolvido, não demanda investigação. Em primeiro lugar, a mera asserção [*mere assertion*] “não é o conceito [*concept*], mas seu nome [*name*] que é envolvido” já fez do conceito um sujeito [*has already made the concept a subject*]. Em segundo lugar, parece sempre legítimo perguntar: “o que é isso que é designado por este nome [*named by this name*]?” Se não houvesse resposta, o nome [*name*] não poderia ser um nome [*name*]; mas, se há uma resposta, o conceito [*concept*], como oposto ao nome [*name*], pode ser convertido em sujeito [*subject*] (Frege, pode-se observar, não parece ter desemaranhado os elementos lógicos e linguísticos da designação [*of naming*]; o primeiro depende da denotação [*denoting*], e tem, acredito, um percurso [de valor] [*range*] muito mais restrito que Frege autoriza). É verdade que encontramos dificuldades na doutrina de que tudo pode ser um sujeito lógico [*logical subject*]: quanto a “qualquer um” [*“any a”*], por exemplo, e também quanto a plurais. Mas no caso de “qualquer um” [*“any a”*] ocorre ambiguidade [*there is ambiguity*], o que introduz uma nova categoria [*class*] de problemas; e quanto a plurais, existem proposições nas quais os plurais se comportam como sujeitos lógicos [*logical subjects*] em todos os aspectos exceto naquele em que eles são vários sujeitos [*many subjects*] e não apenas um (ver §§ 127, 128). No caso dos conceitos [*concepts*], entretanto, nenhuma dessas saídas é possível. O caso das proposições asseridas [*asserted propositions*] é difícil, mas pode ser atendido, penso eu, sustentando que uma proposição asserida [*asserted proposition*] é meramente uma proposição verdadeira, e é, portanto, asserida [*asserted*] onde quer que ocorra, mesmo quando a gramática parece levar à conclusão oposta. Assim, em suma, a doutrina dos conceitos que não podem ser convertidos em sujeitos [*the doctrine of concepts which cannot be made subjects*] parece insustentável.

484. Classes [Classes]. A teoria de classes [*theory of classes*] de Frege é muito difícil e eu não estou certo de tê-la entendido completamente. Ele dá o nome de *Werthverlauf*⁴² [percurso de valor] a uma entidade [*entity*] que parece ser praticamente a mesma daquela que eu denomino de classe enquanto unidade [*class as one*]. O conceito de classe [*concept of the classe*] e de classe enquanto multiplicidade [*class as many*] não aparece em sua exposição. Ele diverge da teoria apresentada no capítulo 6 principalmente porque ele adota uma perspectiva mais intensional de classes [*a more intensional view of classes*] do que a eu tinha adotado, sendo levado a isso

42 Devo traduzir isso como percurso [de valor] [*range*] (N. A.).

sobretudo pelos atrativos de admitir a classe nula [*null-class*] e de distinguir um termo de uma classe cujo único membro é ele mesmo [*a term from a class whose only member it is*]. Concordo completamente que esses dois objetos não podem ser alcançados por uma teoria extensional [*extensional theory*], embora eu tenha tentado mostrar como satisfazer as exigências do formalismo [*requirements of formalism*] (§§ 69 e 73).

A extensão [*extension*] de um *Begriff* [conceito], diz Frege, é o percurso [de valor] [*range*] de uma função [*function*] cujo valor para todo argumento [*argument*] é um valor de verdade [*truth-value*] (*Function und Begriff* [Função e conceito], p. 16)⁴³. Percursos [de valores] [*ranges*] são coisas [*things*], enquanto funções [*functions*] não são (*ib.*, p. 19).⁴⁴ Não haveria classe nula [*null-class*] se as classes fossem tomadas pela extensão [*taken in extension*]; pois a classe nula [*null-class*] só é possível se uma classe não é uma coleção de termos [*if a class is not a collection of terms*] (*Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Uma elucidação crítica de alguns pontos em E. Schröder], pp. 436-7). Se *x* é um termo [*term*], não podemos identificar *x*, como uma perspectiva extensionista exige [*extensional view*], com a classe cujo único membro [*the class whose only member*] é *x*; pois suponha *x* como sendo uma classe que tem mais de um membro [*the class having more than one member*] e permita que *y*, *z* sejam dois membros diferentes [*two different members*] de *x*; então, se *x* é idêntico [*identical*] à classe cujo único membro [*the class whose only member*] é *x*, *y* e *z* serão ambos membros dessa classe [*members of this class*] e serão, portanto, idênticos a *x* e uns aos outros, contrariamente à hipótese⁴⁵ [*contrary to the hypothesis*]. A extensão [*extension*] de um *Begriff* [conceito] está no próprio *Begriff* [conceito] e não nos indivíduos [*the individuals*] que caem sob o *Begriff* [conceito] (*ib.*, p. 451). Quando digo algo sobre todos os homens, nada digo sobre algum miserável no centro da África, que não é de modo algum referenciado [*indicated*], e que não pertence a referência [*the indication*] de homem (p. 454). *Begriffe* [conceitos] são anteriores a suas extensões [*prior to their extension*], e é um engano tentar, como Schröder faz, basear extensão em indivíduos [*extension on individuals*]; isso leva ao cálculo de regiões [*calculus of regions*] (*Gebiete*), não à lógica (p. 455)⁴⁶.

43 “Podemos designar como extensão de um conceito o percurso de valor de uma função cujo valor, para qualquer argumento, é um valor de verdade” (FREGE, 2009, p. 95).

44 “Os percursos de valores das funções são objetos, enquanto que as funções elas mesmas não o são” (FREGE, 2009, p. 97).

45 *Ib.* p. 444. Conferir. *supra*, § 74 (N. A.).

46 Ernst Schröder (1841-1902), um dos mais importantes representantes da tradição algebrista da lógica, criticou a teoria da quantificação presente na **Conceitografia** de Frege, pois, na sua visão, essa não “[...] justifica seus outros desvios da notação Booleana, que pode ser modificada ou estendida de maneira análoga sem dificuldades (*Rechtfertigung seiner sonstigen Abweichungen von Boole's Schreibweise zu finden ist, sondern auch bei der letzteren die analoge Modification oder Erweiterung mit Leichtigkeit sich anbringen lässt*) (SCHRÖDER, 1880, p. 91-92). Schröder tenta demonstrar que a notação Booleana é suficiente para a quantificação criando sua teoria

O que Frege entende por percurso [de valor] [*range*] e como ele deve ser compreendido sem referência aos objetos [*to be conceived without reference to objects*], ele se dedica a explicar em seus *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética]. Ele começa determinando que duas funções proposicionais [*propositional functions*] terão o mesmo percurso [de valor] [*range*] quando elas tiverem o mesmo valor para todo valor de x , isto é, para todo valor de x , ambas são falsas ou ambas são verdadeiras (pp. 7, 14). Isso é estabelecido como uma proposição primitiva [*primitive proposition*]. Mas isso determina apenas a igualdade dos percursos [*equality of ranges*], não o que eles próprios são. Se $X(\xi)$ é uma função que nunca tem o mesmo valor para diferentes valores de ξ e se denotamos [*denote*] por ϕ' o percurso [de valor] [*range*] de ϕx , devemos ter $X(\phi') = X(\psi')$ quando e somente quando ϕ' e ψ' são iguais [*equal*], isto é, quando e somente quando ϕx e ψx sempre têm o mesmo valor. Assim, as condições para a igualdade de percursos [de valor] [*the conditions for the equality of ranges*] não determinam por si só quais serão os percursos [de valor] [*what ranges are to be*] (p. 16). Determinemos arbitrariamente – uma vez que a noção de percurso [de valor] [*the notion of a range*] ainda não está fixada – que o verdadeiro [*the true*] será o percurso da função [*the range of the function*] “ x é verdadeiro” (como uma suposição [*assumption*] e não como uma proposição asserida [*asserted proposition*]), e que o falso [*the false*] é o percurso da função [*the range of the function*] “ $x =$ nem todo termo é igual a ele mesmo” [*not every term is identical with itself*]. Segue-se que o percurso [de valor] [*range*] de ϕx é o verdadeiro [*the true*] quando e apenas quando o verdadeiro [*the true*] e nada mais cai sob o *Begriff* [conceito] ϕx ; o percurso [de valor] [*range*] de ϕx é o falso [*the false*] quando e apenas quando o falso [*the false*] e nada mais cai sob o *Begriff* [conceito] ϕx ; em outros casos, o percurso [de valor] [*range*] nem é o verdadeiro nem o falso [*neither the true nor the false*] (pp. 17-18). Se apenas uma coisa cai sob um conceito [*one thing falls under a concept*], essa uma coisa [*this one thing*] é distinta do percurso [de valor] [*range*] do conceito [*the concept*] em questão (nota da p. 18) – a razão é a mesma mencionada acima.

Há um argumento (p. 49) para provar que o nome do percurso [*name of the range*] de uma função [*function*] sempre tem uma referência [*an indication*], isto é, que o símbolo empregado para isso nunca é sem significado [*meaningless*]. Diante da contradição discutida no capítulo 10, devo me inclinar a negar significado [*to deny a meaning*] para um percurso [de valor] [*range*] quando

baseada nas operações aritméticas $\sum$ (somatório) e $\prod$ (produtório), tal que a proposição particular é concebida como como ‘ $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ ’ e a proposição universal como ‘ $\prod_{i=1}^{i=n} a_i$ ’, já que nesta notação os sinais da soma ‘+’ e

multiplicação ‘ $\times$ ’ eram utilizados para representar, respectivamente, a disjunção e a conjunção. Deste modo, a teoria da quantificação de Schröder consistia da conjunção ou disjunção de todos os termos (membros) de uma sequência, o que envolve um domínio cujo conjunto é contável, justamente a teoria que Russell critica na presente passagem.

temos uma proposição da forma $\phi [f(\phi)]$, onde f é constante e ϕ variável, ou da forma $f_x(x)$, onde x é variável e f_x é uma função proposicional [*propositional function*] que é determinada quando x é dado, mas que varia de um valor de x a outro – provido, quando f_x é analisado em coisas e conceitos [*analysed into things and concepts*], a parte dependente [*the part dependent*] de x não consiste apenas de coisas [*things*], mas contém também ao menos um conceito [*at least one concept*]. É um caso muito complicado, no qual, devo dizer, não há classe enquanto unidade [*class as one*], minha única razão para resolvê-lo assim é que dessa forma encontramos saída para a contradição.

485. Por meio de funções proposicionais variáveis [*variable propositional functions*], Frege obtém uma definição da relação [*relation*] que Peano denomina ε , nomeadamente, a relação de um termo com uma classe da qual ele é membro⁴⁷ [*the relation of a term to a class of which it is a member*]. A definição é da seguinte maneira: “ $a\varepsilon u$ ” se referirá ao termo [*is to mean the term*] (ou o percurso [de valor] dos termos [*range of terms*], se forem muitos ou nenhum) x tal que há uma função proposicional [*a propositional function*] ϕ que é tal que u é o percurso [de valor] [*range*] de ϕ e ϕa é idêntico [*identical*] a x (p. 53). Observa-se que isso define [*defines*] $a\varepsilon u$ para quaisquer coisas [*whatever things*] que possam ser a e u . Em primeiro lugar, suponha-se que u seja o percurso [de valor] [*range*]. Então, existe pelo menos um ϕ cujo percurso [de valor] [*range*] é u , e quaisquer duas [funções] cujo percurso [de valor] [*two whose range*] é u são consideradas por Frege como idênticas [*identical*]. Assim, podemos falar da função ϕ cujo percurso é u [*the function ϕ whose range is u*]. Nesse caso, $a\varepsilon u$ é a proposição ϕa que é verdadeira quando a é membro de u [*when a is a member of u*] e falsa de outro modo. Se, em segundo lugar, u não é um percurso [de valor] [*range*], então não existe uma função proposicional [*propositional function*] tal como ϕ , e, portanto, $a\varepsilon u$ é o percurso [de valor] de uma função proposicional que é sempre falsa [*the range of a propositional function which is always false*], isto é, o percurso-nulo [*null-range*]. Assim, $a\varepsilon u$ se refere ao verdadeiro [*indicates the truth*] quando u é um percurso [de valor] [*range*] e a é um membro [*member*] de u ; $a\varepsilon u$ se refere ao falso [*indicates the false*] quando u é um percurso [de valor] [*range*] e a não é um membro [*member*] de u ; em outros casos, $a\varepsilon u$ se refere [*indicates*] ao percurso-nulo [*null-range*].

É de se observar que a partir da equivalência [*the equivalence*] entre $x\varepsilon u$ e $x\varepsilon v$ para todos os valores de x nós podemos somente inferir a identidade [*infer the identity*] de u e v quando u e v são percursos [de valores] [*ranges*]. Quando eles não são percursos [de valores] [*ranges*], a

⁴⁷ Conferir. §§ 21, 76, *supra* (N. A.).

equivalência sempre se manterá [*equivalence will always hold*], uma vez que $x\epsilon u$ e $x\epsilon v$ são percursos-nulos [*null-range*] para todos os valores de x ; assim, se permitíssemos a inferência [*allowed the inference*] nesse caso, quaisquer dois objetos [*any two objects*] que não são percurso [de valor] [*range*] seriam idênticos [*identical*], o que é absurdo. Pode ser tentador duvidar se u e v precisam ser idênticos [*must be identical*] mesmo quando eles são percursos [*ranges*]: de uma perspectiva intensional de classes [*an intensional view of classes*], isso se torna uma questão em aberto.

Frege prossegue (p. 55) para uma definição análoga de função proposicional [*an analogous definition of the propositional function*] de três variáveis que eu tenho simbolizado [*symbolized*] como xRy , e aqui novamente ele fornece uma definição que não põe nenhuma restrição na variabilidade [*does not place any restrictions on the variability*] de R . Isso é feito pela introdução de um **percurso duplo** [de valor] [*double-range*], definido por uma função proposicional de duas variáveis [*a propositional function of two variables*]; nós podemos considerar isso como uma classe de pares com sentido [*class of couples with sense*]⁴⁸. Se, então, R for essa tal classe de pares [*such a class of couples*], e se $(x; y)$ é um membro dessa classe [*member of this class*], xRy será mantido [*x R y is to hold*]; em outros casos, deverá ser falso ou nulo [*it is to be false or null*] como antes. Com base nisso, Frege, de modo bem sucedido, edifica o tanto de lógica de relações [*as much of the logic of relations*] quanto é requerido pela sua Aritmética; e ele está livre das restrições quanto à variabilidade [*the restrictions on the variability*] de R , que surgem da perspectiva intensional das relações [*intensional view of relations*] adotada no presente trabalho (cf. § 83).

486. A principal dificuldade que surge da teoria de classes acima [*theory of classes*] é que tipo de entidade seria um percurso [de valor] [*the kind of entity that a range*]. A razão que me levou, contra minhas inclinações, a adotar uma perspectiva extensional das classes [*extensional view of classes*], foi a necessidade de descobrir alguma entidade [*some entity*] determinada para uma função proposicional [*propositional function*] dada, e a mesma para qualquer função proposicional equivalente [*equivalent propositional function*]. Assim, “ x é um homem” é equivalente [*equivalente*] (suponhamos) a “ x é um bípede implume”, e desejamos descobrir alguma entidade específica [*some one entity*] que é determinada da mesma maneira pelas duas funções proposicionais [*propositional functions*]. A única entidade [*the only single entity*] que fui capaz de descobrir é a de classe enquanto unidade [*class as one*] – exceto a classe derivada [*derivative class*] (também enquanto unidade [*as one*]) de funções proposicionais [*propositional functions*]

⁴⁸ Negligenciando, por enquanto, nossas dúvidas sobre se há uma entidade tal como pares com sentido [*couple with sense*], cf. § 98 (N.A.).

equivalentes [*equivalent*] a alguma das funções proposicionais [*propositional functions*] dadas. Essa última classe [*this latter class*] é notadamente uma noção mais complexa [*a more complex notion*], que não nos autorizará a prescindir da noção geral de classe [*the general notion of class*]; mas essa noção mais complexa [*more complex notion*] (conforme concordamos no § 73) deve ser substituída pela classe de termos [*the class of terms*] no tratamento simbólico [*the symbolic treatment*], se tem de haver alguma classe nula [*any null-class*] e se a classe cujo único membro é um termo dado [*class whose only member is a given term*] deve ser distinguida deste termo [*term*]. Seria certamente uma simplificação grosseira admitir, como Frege faz, um percurso [de valor] [*range*] que é outra coisa além do todo composto dos termos [*the whole composed of the terms*] que satisfaçam a função proposicional [*propositional function*] em questão; mas da minha parte, o exame não me revelou nenhuma entidade assim [*no such entity*]. Com base nisto, e também por conta da contradição, sinto-me compelido a aderir à teoria extensional das classes [*extensional theory of classes*], embora não exatamente como apresentada no capítulo 6.

487. Que é necessária alguma modificação naquela doutrina, é demonstrado pelo argumento de *Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Uma elucidação crítica de alguns pontos em E. Schröder]. p. 444. Este argumento parece capaz de demonstrar que uma classe [*class*], mesmo enquanto unidade [*as one*], não pode ser identificada com a classe da qual é o único membro [*the class of which it is the only member*]. No § 74, eu contestei que o argumento foi encontrado pela distinção entre a classe enquanto unidade [*the class as one*] e a classe enquanto multiplicidade [*class as many*], mas esta contestação me parece agora equivocada. Por este motivo, é necessário reexaminar a doutrina das classes como um todo [*the whole doctrine of classes*].

O argumento de Frege é da seguinte maneira. Se *a* é uma classe de mais de um termo [*a class of more than one term*], e se *a* é idêntico [*identical*] à classe cujo único termo [*class whose only term*] é *a*, então, ser um termo [*term*] de *a* é o mesmo que ser um termo da classe cujo único termo [*a term of the class whose only term*] é *a*, daí *a* ser o único termo [*only term*] de *a*. Este argumento parece provar não somente que a perspectiva extensional de classes [*the extensional view of classes*] é inadequada, mas que é completamente inadmissível. Pois, suponha ser *a* uma coleção [*collection*], e suponha que uma coleção de um termo [*collection of one term*] é idêntica [*identical*] a este termo [*term*]. Então, se *a* pode ser considerada como uma coleção [*one collection*], o argumento acima prova que *a* é o único termo [*the only term*] de *a*. Nós não podemos escapar ao dizer que ε deve ser a relação de conceito-classe [*a relation to the class-concept*] ou de conceito de

classe [*concept of the class*] ou de classe enquanto multiplicidade [*class as many*], pois se há qualquer entidade [*any such entity*] tal como uma classe enquanto unidade [*class as one*], haverá uma relação, que nós podemos chamar de ε , entre termos [*terms*] e suas classes enquanto unidade [*classes as one*]. Assim, o argumento acima leva à conclusão de que ou (α) uma coleção de mais de um termo [*a collection of more than one term*] não é idêntica [*identical*] à coleção cujo único termo é ela própria [*the collection whose only term it is*] ou (β) não há absolutamente nenhuma coleção enquanto unidade como termo [*no collection as one term at all*] no caso de uma coleção de muitos termos [*a collection of many terms*], mas a coleção [*the collection*] é única e exclusivamente múltipla [*many*]. Ou uma ou a outra destas deve ser admitida em virtude do argumento acima.

488. (α) Para quaisquer dessas perspectivas, existem sérias objeções. A primeira é o ponto de vista de Frege e Peano. Para perceber a natureza paradoxal dessa perspectiva, é preciso apreender claramente que não é apenas a coleção enquanto múltipla [*the collection as many*], mas a coleção enquanto unidade [*the collection as one*], que é distinta da coleção cujo único termo é ela própria [*the collection whose only term it is*] (eu falo de coleções [*collections*] porque é importante examinar a base [*the bearing*] do argumento de Frege em face da possibilidade de um ponto de vista extensional [*an extensional standpoint*]). Essa perspectiva, a despeito de seu paradoxo, é certamente a que parece ser exigida pelo simbolismo [*symbolism*]. É bastante essencial que devamos ser capazes de considerar uma classe como um único objeto [*a class as a single object*], que deva haver uma classe nula [*null-class*], e que um termo [*term*] não deva (em geral, seja qual for o caso [*at any rate*]) ser idêntico [*identical*] à classe da qual ele é o único membro [*the class of which it is the only member*]. É submetido a essas condições que o significado simbólico [*symbolic meaning*] de classe [*class*] deve ser interpretado. A noção de Frege de percurso [de valor] [*notion of a range*] pode ser identificada com a coleção enquanto unidade [*collection as one*], e até então tudo vai bem. Mas é muito difícil ver qualquer entidade [*any entity*] como o percurso [de valor] [*range*] fregeano e o argumento de que deve haver tal entidade [*such an entity*] é de pouca ajuda. Ademais, devido à contradição, certamente existem casos nos quais temos uma coleção enquanto múltipla [*collection as many*], mas nenhuma coleção enquanto unidade [*collection as one*] (§ 104). Examinemos então (β), e vejamos se ele nos oferece uma solução melhor.

(β) Suponhamos que uma coleção de um termo é esse termo singular [*a collection of one term is that one term*], e que uma coleção de muitos termos [*collection of many terms*] é (ou melhor são) estes muitos termos [*many terms*], de modo que não há absolutamente nenhum termo singular [*single term*] que é a coleção dos muitos termos [*collection of the many terms*] em questão. Nessa

perspectiva, não há, à primeira vista, em todo caso, nada paradoxal, e ela tem o mérito de admitir universalmente o que a contradição mostra ser algumas vezes o caso. Nesse caso, a menos que abandonemos um de nossos dogmas fundamentais, e terá de ser uma relação de um termo com sua classe-conceito [*a relation of a term to its class-concept*], e não com sua classe [*class*]; se *a* é uma classe-conceito [*class-concept*], o que aparece simbolicamente [*symbolically*] como a classe cujo único membro é *a* [*the class whose only term is a*] será (pode-se supor) a classe-conceito [*class-concept*] sob a qual cai somente o conceito [*concept*] *a*, que é, claro (no geral, senão sempre), diferente de *a*. Devemos manter, por conta da contradição, que não há sempre uma classe-conceito [*class-concept*] para uma função proposicional [*propositional function*] dada ϕx , isto é, que não há sempre, para todo ϕ , alguma classe-conceito [*class-concept*] tal que $x \in a$ é equivalente [*equivalent*] a ϕx para todos os valores de *x*; e os casos nos quais não há classes-conceitos assim [*no such class-concept*] serão os casos nos quais ϕ é uma forma quadrática [*quadratic form*].

Até então, tudo vai bem. Mas agora não temos mais uma entidade definida [*one definite entity*] que é determinada igualmente por qualquer um dos conjuntos de funções proposicionais equivalentes [*a set of equivalent propositional functions*], isto é, pode-se argumentar que não há mais significado para a classe [*no meaning of class*] que seja determinado unicamente pela extensão [*extension*]. Assim, para tomar um caso em que isso leve a confusão, se *a* e *b* são diferentes conceitos-classe [*class-concepts*] tal que $x \in a$ e $x \in b$ são equivalentes [*equivalent*] para todos os valores de *x*, o conceito-classe [*the class-concept*] sob a qual nada mais senão *a* cai não será idêntica [*identical*] a que nada mais cai sob senão *b*. Assim, não conseguimos obter nenhum meio de denotar [*denoting*] o que deveria simbolicamente corresponder à classe enquanto unidade [*symbolically correspond to the class as one*]. Ou novamente, se *u* e *v* são classes semelhantes [*similar*], mas diferentes, “semelhante [*similar*] a *u*” é um conceito diferente [*a different concept*] de “semelhante [*similar*] a *v*”; assim, a menos que possamos encontrar algum significado extensional [*some extensional meaning*] para classe [*class*], não somos capazes de dizer que o número de *u* é o mesmo que o de *v*. E todos os usuais problemas elementares como os de combinações [*combinations*] (isto é, como o número de classes [*classes*] de tipos específicos [*specified kinds*] estão contidos [*contained*] em uma classe [*class*] dada) se tornarão impossíveis e mesmo sem significação [*meaningless*]. Por essas várias razões, um objetor pode argumentar, algo como classe enquanto unidade [*class as one*] deve ser mantido; e o percurso [de valor] [*range*] de Frege atende às condições requeridas. Parece ser necessário, portanto, aceitar percursos [de valores] [*ranges*] por um ato de fé, sem esperar ver se existem tais coisas [*such things*].

Apesar disso, a não-identificação da classe [*the class*] com a classe enquanto unidade [*class as one*], seja na minha forma, seja na forma do percurso [de valor] [*range*] fregeano, parece incontornável, e por um processo de exclusão a classe enquanto multiplicidade [*class as many*] é deixada como o único objeto [*the only object*] que pode fazer parte de uma classe [*a class*]. Por uma modificação da lógica até então defendida no presente trabalho, devemos ser capazes, penso eu, de satisfazer de uma vez por todas as exigências da contradição e manter-nos em harmonia com o senso comum⁴⁹.

489. Começemos recapitulando as possíveis teorias de classe [*possible theories of classes*] que foram apresentadas. Uma classe [*a class*] pode ser identificada com (α) o predicado, (β) a classe conceito [*the class concept*], (γ) o conceito de classe [*the concept of the class*], (δ) o percurso [de valor] [*range*] de Frege, (ϵ) a conjunção numérica dos termos da classe [*the terms of the class*], (ζ) a totalidade [*the whole*] composta dos termos da classe [*the terms of the class*]. Dessas teorias, as três primeiras, que são intensionais [*intensional*], possuem o defeito de não resultarem em uma classe determinada [*a class determinate*] quando seus termos [*terms*] são dados. As três demais não possuem esse defeito, mas têm outros. (δ) é prejudicada pela dúvida de se há tal entidade [*such an entity*], e também pelo fato de que, se os percursos [de valores] [*ranges*] são termos [*terms*], a contradição é inevitável. (ϵ) é logicamente irrepreensível, mas não é uma entidade singular [*single entity*], exceto quando a classe tem só um membro [*the class has only one member*]. (ζ) não pode existir sempre como um termo [*as a term*], pela mesma razão empregada contra (δ); também não pode ser identificado com a classe [*the class*] devido ao argumento de Frege⁵⁰.

Apesar disso, sem um objeto singular⁵¹ [*single object*] para representar uma extensão [*represent an extension*], a matemática desmorona. Duas funções proposicionais [*propositional functions*] que são equivalentes [*equivalent*] para todos os valores da variável podem não ser idênticas [*identical*], mas é necessário que haja algum objeto [*some object*] determinado por ambas. Qualquer objeto [*any object*] que possa ser proposto, entretanto, pressupõe uma noção de classe [*notion of class*]. Podemos definir classe de modo opcional [*we may define class optatively*] da seguinte forma: uma classe [*a class*] é um objeto [*object*] determinado exclusivamente por uma função proposicional [*propositional function*] e determinado do mesmo modo por qualquer função proposicional equivalente [*any equivalent propositional function*]. Agora não podemos tomar esse objeto [*this object*] como (tal qual outros casos de relações simétricas transitivas [*symmetrical*

49 A doutrina a ser defendida no que se segue é a negação direta do dogma afirmado na nota do § 70 (N.A.).

50 Arquivo I, p. 444 (N.A.).

51 Para o uso da palavra objeto [*object*] na seguinte discussão, ver nota do § 58 (N.A.).

transitive relations]) a classe de funções proposicionais [*the class of propositional functions*] equivalentes [*equivalent*] a uma função proposicional [*propositional function*] dada. Novamente, relações equivalentes [*equivalent relations*], consideradas intensionalmente [*intensionally*], podem ser distintas: desejamos, portanto, encontrar algum objeto específico [*some one object*] determinado igualmente por qualquer conjunto específico de relações equivalentes [*any one of a set of equivalent relations*]. Mas os únicos objetos [*objects*] que sugerem a si mesmos são a classe de relações [*the class of relations*] ou a classe de pares [*class of couples*] formando seu percurso [de valor] [*range*] comum. E sem a noção de classe [*the notion of class*], problemas elementares, como “quantas combinações [*combinations*] podem ser formadas de *m* objetos [*objects*] *n* de cada vez?” se tornam sem significação [*meaningless*]. Ainda mais, parece imediatamente evidente que há alguma razão [*there is some sense*] para dizer que dois conceitos-classes [*class-concepts*] têm a **mesma** extensão [*extension*] e isso requer que haja algum objeto [*object*] que pode ser denominado extensão da conceito-classe [*extension of a class-concept*]. Mas é excessivamente difícil descobrir qualquer objeto assim [*any such object*] e a contradição prova de modo conclusivo que, mesmo se algumas vezes houver um objeto assim [*such an object*], existem funções proposicionais [*propositional functions*] para as quais a extensão [*extension*] não é um termo [*one term*].

A classe enquanto multiplicidade [*class as many*], que numeramos (ϵ) acima, é irrepreensível, mas são muitos [termos] e não um [*is many and not one*]. Podemos, se escolhermos, representá-la por um único símbolo [*single symbol*]: assim $x\epsilon u$ significa [*mean*] “*x* é um dos *u*’s”. Isso não deve ser tomado como uma relação de dois termos [*relation of two terms*], *x* e *u*, porque *u* enquanto conjunção numérica [*as the numerical conjunction*] não é um termo singular [*single term*], e nós queremos dar um significado [*a meaning*] ao $x\epsilon u$ que se mantenha o mesmo se por *u* substituíssemos uma classe equivalente [*an equal class*] *v*, que nos previne de interpretar *u* intensionalmente [*intensionally*]. Assim, podemos considerar “*x* é um dos *u*’s” como expressando [*expressing*] uma relação de *x* com muitos termos [*many terms*], dentre os quais *x* está incluído. A principal objeção a essa perspectiva, se apenas termos singulares [*single terms*] podem ser sujeitos [*subjects*], é que se *u* é um símbolo representando essencialmente muitos termos [*standing essentially for many terms*], não podemos fazer de *u* um sujeito lógico [*logical subject*] sem nos arriscarmos a erros. Não podemos mais falar, pode-se supor, de uma classe de classes [*a class of classes*]; pois o que deveriam ser os termos de tal classe [*terms of such a class*] não são termos singulares [*single terms*], mas são cada um muitos termos [*each many terms*].⁵² Não podemos

52 Quando quer que o contexto exija, o leitor deverá adicionar “se a classe [*the class*] em questão (ou todas as classes [*all the classes*] em questão) não consistir de um termo singular [*single term*]” (N.A.).

asserir [*assert*] um predicado de muitos [*of many*], pode-se supor, exceto no sentido de asseri-lo [*in the sense of asserting*] de cada um dos muitos [*many*]; mas o que é requerido aqui é que a asserção [*assertion*] de um predicado relativo a muitos enquanto muitos [*concerning the many as many*], e não relativo a cada um nem ainda relativo ao todo (se há algum) que todos compõem. Assim, uma classe de classes [*a class of classes*] será múltipla de muitos [*many many's*]; seus constituintes serão cada um exclusivamente múltiplos [*each be only many*], e não poderão, portanto, ser de modo algum, pode-se supor, constituintes singulares [*single constituents*]. Agora me vejo forçado a manter, apesar da aparente dificuldade lógica, que isso é precisamente o que é requerido para a asserção de número [*the assertion of number*]. Se temos uma classe de classes [*class of classes*], da qual cada um dos membros [*members*] têm dois termos, é necessário que os membros [*members*] devam ser genuinamente um duplo [*genuinely two-fold*], e não sejam uma unidade [*each one*]. Ou novamente, “Brown e Jones são dois” requer que não precisemos combinar Brown e Jones em um todo único [*single whole*], mas ainda assim ela tem a forma de uma proposição sujeito-predicado [*the form of a subject-predicate proposition*]. Mas agora uma dificuldade surge quanto ao número dos membros [*number of members*] de uma classe de classes [*a class of classes*]. Em que sentido [*in what sense*] podemos falar de dois pares [*two couples*]? Isso parece requerer que cada par [*each couple*] seja uma unidade singular [*single entity*]; entretanto, mesmo se o fossem, precisaríamos de duas unidades [*two units*] e não de dois pares [*two couples*]. Requeremos um sentido de diversidade de coleções [*a sense for diversity of collections*], significando [*meaning*], aparentemente deste modo, que $\chi\epsilon\upsilon$ e $\chi\epsilon\nu$ não são equivalentes [*are not equivalent*] para todos os valores de x .

490. A doutrina lógica que se impõe a nós é esta: o sujeito de uma proposição [*subject of a proposition*] não pode ser um termo singular [*single term*], mas essencialmente termos múltiplos [*many terms*]; este é o caso em todas as proposições que asserem [*assert*] números que não sejam 0 e 1. Mas os predicados ou conceitos-classe [*class-concepts*] ou relações que podem ocorrer em proposições que possuem sujeitos plurais [*plural subjects*] são diferentes (com algumas exceções) daqueles que podem ocorrer em proposições que possuem termos singulares como sujeitos [*single terms as subjects*]. Embora uma classe [*class*] seja múltipla [*many*] e não singular [*one*], ainda há identidade e diversidade entre classes [*identity and diversity among classes*], e, assim, classes [*classes*] podem ser consideradas [*counted*] como se cada uma fosse uma unidade genuína [*genuine unity*]; e, desta forma, podemos falar de **uma** classe [*one class*] e das classes que são membros da classe de classes [*the classes which are members of a class of classes*]. No entanto, é preciso que **um** [*one*] seja considerado de modo diferente, quando asserido de uma classe [*asserted of a class*] e

quando é asserido de um termo [*asserted of a term*]; ou seja, há um significado [*a meaning*] de **um** [*one*] que é aplicável quando se fala de **um termo** [*one term*] e outro que é aplicável quando se fala de **uma classe** [*one class*], mas há também um significado geral [*general meaning*], aplicável em ambos os casos. A doutrina fundamental sobre a qual todo o restante repousa é aquela na qual o sujeito [*subject*] de uma proposição pode ser plural [*plural*] e que tais sujeitos plurais [*plural subjects*] são o significado pretendido [*what is meant*] por classes que possuem mais de um termo⁵³ [*classes which have more than one term*].

Agora, será necessário distinguir (1) termos [*terms*], (2) classes [*classes*], (3) classes de classes [*classes of classes*] e assim por diante *ad infinitum*; nós deveremos sustentar que nenhum membro de um conjunto [*no member of one set*] é um membro de qualquer outro conjunto [*a member of any other set*] e que $x\epsilon u$ requer que x deva ser de um conjunto de um nível inferior por um [*a set of a degree lower by one*] ao conjunto [*set*] para o qual u pertence. Assim, $x\epsilon x$ se tornará uma proposição sem significação [*meaningless proposition*]; e, desse modo, evita-se a contradição.

491. Mas devemos agora considerar o problema das classes [*of classes*] que têm um membro ou nenhum [*one member or none*]. O caso da classe nula [*null-class*] pode ser atendido com uma simples negação – isso é apenas inconveniente e não autocontraditório. Mas no caso das classes que têm apenas um termo [*classes having only one term*] ainda é necessário distingui-las dos seus únicos membros [*sole members*]. Isso resulta do argumento de Frege, que podemos repetir do seguinte modo. Sendo u uma classe tendo mais de um termo [*a class having more than one term*]; sendo iu a classe das classes [*the class of classes*] cujo único membro [*only member*] é u . Então, iu tem um membro [*one member*], u tem muitos; daí que u e iu não são idênticos [*identical*]. Podemos duvidar, à primeira vista, se este argumento é válido. A relação de x com u expressa por $x\epsilon u$ é uma relação de um único termo com muitos termos [*a relation of a single term to many terms*]; a relação de u com iu expressa [*expressed*] por $u\epsilon iu$ é uma relação de muitos termos [*many terms*] (como sujeito [*subject*]) com muitos termos [*many terms*] (como predicado)⁵⁴. Um objetor poderia argumentar que essa é uma relação diferente daquela anterior e assim o argumento desmorona. É de modos diferentes que x é um membro [*member*] de u e que u é um membro [*member*] de iu ; assim, u e iu podem ser idênticos [*identical*], contrariamente ao argumento.

Esta tentativa, no entanto, de escapar do argumento de Frege pode ser refutada. Para todos os propósitos da Aritmética, para começar, e para muitos dos propósitos da lógica, é necessário que haja um significado [*a meaning*] para ϵ que possa ser igualmente aplicado para a relação de um

53 Conferir §§ 128, 132 *supra* (N.A.).

54 A palavra predicado é usada aqui em um sentido vago [*loosely*], e não no sentido preciso definido no § 48 (N.A.).

termo com uma classe [*the relation of a term to a class*], de uma classe com uma classe de classes [*a class to a class of classes*] e assim sucessivamente. Mas o principal ponto é que, se todo termo singular [*single term*] é uma classe [*class*], a proposição $x\epsilon x$, a qual dá origem à contradição, deve ser admissível. É apenas distinguindo x de ix , e insistindo que em $x\epsilon u$ o u deve ser sempre de um tipo superior por um [*type higher by one*] que x , que a contradição pode ser evitada. Assim, embora possamos identificar a classe com a conjunção numérica de seus termos [*identify the class with the numerical conjunction of its terms*], quando há um único termo [*only one term*] devemos aceitar o percurso [de valor] [*range*] de Frege como um objeto distinto [*object distinct*] de seu único termo [*only term*]. E tendo feito isso, podemos naturalmente admitir também um percurso [de valor] [*range*] no caso de uma função proposicional nula [*null propositional function*]. Podemos divergir de Frege apenas considerando um percurso [de valor] [*range*] como não sendo um termo [*a term*] em caso algum, mas um objeto [*object*] de um tipo lógico diferente [*different logical type*], no sentido [*in the sense*] de que uma função proposicional $\phi(x)$, na qual x pode ser qualquer termo [*any term*], é no geral sem significação [*meaningless*] se nós substituirmos x por um percurso [de valor] [*range*]; e se x pode ser qualquer percurso [de valor] de termos [*any range of terms*], $\phi(x)$ será no geral sem significação [*meaningless*] se por x substituirmos ou um termo [*a term*] ou um percurso [de valor] de percurso [de valor] de termos [*a range of ranges of terms*]. Percursos [de valores] [*Ranges*], finalmente, são o que é apropriado de denominar como classes [*classes*], e é deles que números são asseridos [*asserted*].

492. De acordo com a perspectiva aqui defendida, será necessário, para toda variável, referenciar [*to indicate*] se seu âmbito de significância [*field of significance*] são termos [*terms*], classes [*classes*], classes de classes [*classes of classes*] e assim sucessivamente⁵⁵. Uma variável não será capaz, exceto em casos especiais, de estender-se de um desses conjuntos para outro [*to extend from one of these sets into another*]; e em $x\epsilon u$, o x e o u devem sempre pertencer a tipos diferentes [*different types*]; ϵ não será uma relação entre objetos do mesmo tipo [*a relation between objects of the same type*], mas $\epsilon\epsilon$ ou $\epsilon R\epsilon$ ⁵⁶ serão, na condição que R o seja. Teremos de distinguir também entre relações de acordo com os tipos [*types*] aos quais seus domínios [*domains*] e contradomínios [*converse domains*] pertencem; também variáveis cujos âmbitos incluem relações [*fields include relations*], essas sendo entendidas como classes de pares [*classes of couples*], por regra não incluirão nada a mais, e relações entre relações serão diferentes no tipo [*different in type*] daquelas relações entre termos. Isso parece conduzir à verdade – embora de uma forma completamente

55 Ver apêndice B (N.A.).

56 Sobre essa notação, ver §§ 28 e 97 (N.A.).

extensional [*extensional form*] – subjacente à distinção fregeana entre termos [*terms*] e vários tipos de função [*kinds of function*]. Além disso, de fato, a opinião defendida aqui parece aderir muito de perto ao senso comum.

Assim, a conclusão final é que a teoria correta das classes [*theory of classes*] é ainda mais extensional [*extensional*] que aquela do capítulo 6; que a classe enquanto multiplicidade [*class as many*] é o único objeto [*the only object*] sempre definido pela função proposicional [*propositional function*] e é adequada para propósitos formais [*formal purposes*]; que a classe enquanto unidade [*class as one*], ou o todo composto dos termos da classe [*whole composed of the terms of the class*], é provavelmente uma entidade [*entity*] genuína exceto onde a classe [*class*] é definida por uma função quadrática [*a quadratic function*] (ver § 103), mas nesses casos, e em outros casos possíveis, a classe enquanto multiplicidade [*class as many*] é o único objeto definido de modo exclusivo [*object uniquely defined*].

A teoria de que há diferentes tipos de variáveis [*different kinds of variables*] demanda uma reforma na doutrina da implicação formal [*formal implication*]. Em uma implicação formal [*formal implication*], a variável, de modo geral, não assume todos os valores aos quais variáveis são suscetíveis, mas apenas assume aqueles que tornam a função proposicional [*propositional function*] em questão uma proposição. Para outros valores da variável, deve-se considerar que qualquer função proposicional [*propositional function*] dada se torna sem significação [*meaningless*]. Assim, em $x\epsilon u$, u precisa ser uma classe [*class*] ou uma classe de classes [*class of classes*] ou etc., e x precisa ser um termo [*term*] se u é uma classe [*class*], uma classe se u é uma classe de classes [*class of classes*], e assim sucessivamente; em toda função proposicional [*propositional function*] existirá algum percurso [de valor] [*range*] admissível para a variável, mas, em geral, existirão valores possíveis para outras variáveis que não serão admissíveis no caso dado. Esse fato exigirá uma certa modificação dos princípios da lógica simbólica [*Symbolic Logic*]; mas permanece verdadeiro que em uma implicação formal [*formal implication*], todas as proposições pertencentes a uma função proposicional [*propositional function*] dada são asseridas [*asserted*].

Com isso, chegamos ao fim da parte mais filosófica do trabalho de Frege. Resta lidar brevemente com sua lógica simbólica [*Symbolic Logic*] e Aritmética [*Arithmetic*]; mas aqui me encontro de acordo com ele de forma tão completa que dificilmente é necessário fazer mais além de reconhecer sua descoberta de proposições que, quando escrevi, acreditei que fossem novas.

493. Implicação [*implication*] e Lógica Simbólica [*Symbolic Logic*]. A relação empregada por Frege como fundamental na lógica de proposições [*logic of propositions*] não é exatamente a

mesma que eu tenho chamado de implicação: é uma relação que se estabelece entre p e q sempre que q é verdadeira ou p não é verdadeira, enquanto que a relação que eu emprego se estabelece sempre que p e q são proposições e q é verdadeira ou p é falsa. Quer dizer, a relação de Frege se estabelece quando p não é proposição alguma, qualquer que possa ser q ; a minha não se estabelece a não ser que p e q sejam proposições. A definição dele possui a vantagem formal [*formal advantage*] de evitar a necessidade de hipóteses da forma “ p e q são proposições”; mas possui a desvantagem de não levar a uma definição de **proposição** e de negação [*negation*]. De fato, negação [*negation*] é tomada por Frege como indefinível [*indefinable*]; **proposição** é introduzida por meio da noção indefinível de um valor de verdade [*indefinable notion of a truth-value*]. Para qualquer que seja x , “o valor de verdade [*truth-value*] de x ” se referirá [*is to indicate*] ao verdadeiro se x for verdadeiro, e ao falso em todos os outros casos. A notação de Frege possui certas vantagens sobre a de Peano, apesar de ser excessivamente intrincada e de difícil uso. Ele invariavelmente define expressões para todos os valores da variável, enquanto que as definições de Peano são frequentemente precedidas por uma hipótese. Ele possui um símbolo especial para asserção [*a special symbol for assertion*] e ele é capaz de asserir [*to assert*] para todos os valores de x uma função proposicional [*propositional function*] não declarando [*stating*] uma implicação [*implication*], o que o simbolismo [*symbolism*] de Peano não fará. Ele também distingue, pelo uso de letras latinas e germânicas respectivamente, entre **qualquer** proposição de certa função proposicional [*any proposition of a certain propositional function*], e **todas** as tais proposições [*all such propositions*]. Ao usar implicações [*implications*] sempre, Frege evita o produto lógico de duas proposições [*the logical product of two propositions*] e, dessa maneira, não possui nenhum axioma correspondendo a Importação [*Importation*] e Exportação [*Exportation*].⁵⁷ Portanto, a asserção conjunta [*joint assertion*] de p e q é a negação de “ p implica não- q ”.

494. Aritmética [Arithmetic]. Frege dá exatamente a mesma definição de número cardinal que eu dei, pelo menos se identificarmos seu percurso [de valor] [*range*] com minha classe⁵⁸ [*class*]. Mas acompanhando sua teoria intensional de classes [*intensional theory of classe*], ele considera o número como uma propriedade da conceito-classe [*a property of the class-concept*], não da classe como extensão [*class in extension*]. Se u é um percurso [de valor] [*range*], o número de u é o percurso [de valor] [*range*] do conceito [*concept*] “percurso [de valor] semelhante [*range similar*] a u ”. Nos *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], outras teorias são discutidas e

⁵⁷ Ver § 18, (7), (8) (N.A.).

⁵⁸ Ver *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética]. pp. 79, 85; *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética]. p. 57, Df. Z (N.A.).

recusadas. Números não podem ser asseridos de objetos [*be asserted of objects*], porque o mesmo conjunto de objetos [*set of objects*] pode ter diferentes números atribuídos [*assigned*] a ele (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 29)⁵⁹; por exemplo, um exército é tantos regimentos e tantos outros números de soldados. Essa perspectiva parece envolver uma perspectiva por demais física dos objetos [*objects*]: eu não considero que o exército é o mesmo objeto [*the same object*] que os regimentos. Um argumento mais contundente para a mesma perspectiva é que 0 não se aplicará a objetos [*will not apply to objects*], mas somente a conceitos [*concepts*] (p. 59). Esse argumento, penso eu, é conclusivo até certo ponto; mas ele é satisfeito pela perspectiva do significado simbólico [*symbolic meaning*] das classes [*classes*] estabelecido no §73. Os próprios números, como outros percursos [de valores] [*ranges*], são coisas [*things*] (p. 67). Pois, definindo números como percursos [de valores] [*ranges*], Frege fornece os mesmos fundamentos gerais que forneci, nomeadamente o que denomino princípio de abstração [*principle of abstraction*]. Nos *Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], vários teoremas nas bases da Aritmética cardinal são provados com grande elaboração, tanto que muitas vezes é difícil descobrir a diferença entre as etapas sucessivas em uma demonstração. Diante da contradição do capítulo 10⁶⁰, é evidente que alguma correção é necessária nos princípios de Frege; mas é difícil acreditar que ela possa fazer algo além de introduzir alguma limitação geral [*general limitation*] que deixa os detalhes incólumes.

495. Além de seu trabalho com os números cardinais, Frege, já na *Begriffsschrift* [Conceitografia], tem uma teoria das progressões muito admirável [*theory of progressions*], ou melhor, de todas as séries [*series*] que podem ser geradas por relações muitos-um [*many-one relations*]. Frege não se restringe a relações biunívocas [*one-one relations*]: enquanto nos movermos em apenas uma direção [*in only one direction*], uma relação muitos-um [*a many-one relation*] gerará séries [*generate a series*]. Em algumas partes de sua teoria, ele chega a lidar com relações gerais. Ele começa considerando, para qualquer relação $f(x, y)$, funções F que são tal que, se $f(x, y)$ se estabelece [*holds*], então $F(x)$ implica $F(y)$. Se essa condição se estabelece, Frege afirma que a propriedade F é herdada [*is inherited*] nas séries- f [*f-series*] (*Begriffsschrift* [Conceitografia], pp. 55-58). Disso, ele prossegue para definir, sem o uso de números, uma relação que é equivalente [*equivalent*] a “alguma potência positiva da relação dada [*some positive power of*

59 “Se, observando o mesmo fenômeno exterior, posso dizer de modo igualmente verdadeiro: ‘Isto é um grupo de árvores’ e ‘isto são cinco árvores’, ou ‘aqui há quatro companhias’ e ‘aqui há 500 homens’, o que varia não é o objeto singular nem o todo, o agregado, mas sim minha maneira de denominar” (FREGE, 1983, p. 240).

60 Novamente, a respeito da contradição, conferir artigo de MORAIS, L. I., publicado no presente dossiê.

the given relation”]. Isso é definido do seguinte modo. Se toda propriedade [*every property*] *F*, que é herdada [*is inherited*] nas séries-*f* [*f-series*] e é tal que *f*(*x*, *z*) implica [*implies*] *F*(*z*) para todos os valores de *z* pertencentes a *y*, então a relação em questão se estabelece entre *x* e *y* (*Begriffsschrift* [Conceitografia], p. 60). Nesta base, uma teoria de séries não-numérica [*a non-numerical theory of series*] surge de forma muito bem-sucedida, e é aplicada na *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética] para a prova de proposições relativas ao número de números finitos e tópicos similares. Até onde eu sei, isso é o melhor método de tratamento de tais questões e a definição de Frege que acabei de citar fornece, aparentemente, a melhor forma de indução matemática [*mathematical induction*]. Mas como não há controvérsia alguma envolvida, não devo prosseguir mais além com esse assunto.

Os trabalhos de Frege contêm um criticismo muito admirável do ponto de vista psicológico na lógica [*the psychological standpoint in logic*], bem como da teoria formalista da matemática [*theory of mathematics*], que acredita que os próprios símbolos são o conteúdo [*subject-matter*] com o qual a matemática lida e que suas propriedades podem ser atribuídas [*assigned*] arbitrariamente por definição. Em ambos os pontos, estou completamente de acordo com ele.

496. Kerry (*loc. cit.*) tem criticado Frege severamente e afirma ter provado que uma teoria da Aritmética inteiramente lógica [*a purely logical theory of Arithmetic*] é impossível (p. 304). Quanto à questão de se conceitos [*concepts*] podem ser tornados sujeitos lógicos [*logical subjects*], eu me encontro em concordância com suas críticas; em outros pontos, elas parecem repousar sobre meros mal-entendidos. Uma vez que estes são tais que ocorreriam naturalmente a qualquer um que não possui familiaridade com lógica simbólica, devo discuti-los brevemente.

A definição de números como classes [*numbers as classes*] é, assere Kerry, a ὅσπερ πρότερον⁶¹. Devemos saber que todo conceito [*concept*] possui somente **uma** extensão [*extension*] e devemos saber o que **um** objeto [*one object*] é; os números de Frege, na verdade, são meramente símbolos [*symbols*] convenientes para o que é comumente denominado número (p. 277). É preciso admitir, penso eu, que a noção de **termo** [*term*] é indefinível (*cf.* § 132 *supra*) e que é pressuposta na definição do número 1. Mas Frege argumenta – e o argumento dele, no mínimo, merece ser discutido – que **um** não é um predicado [*one is not a predicate*], aderindo a todo termo [*term*] imaginável, mas possui um significado menos geral [*a less general meaning*] e adere [*attaches*] a conceitos [*concepts*] (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 40). Assim, **um termo** [*a term*] não deve ser analisado em **um** [*one*] e **termo** [*term*] e não pressupõe a noção de **um**

61 A expressão grega mencionada quer dizer “deixe para lá”, “deixe para outro momento”.

[*the notion of one*] (conferir § 72 *supra*). Quanto à suposição [*assumption*] de que todo conceito [*concept*] possui somente uma extensão [*only one extension*], não é preciso poder declarar isto em uma linguagem que empregue o número 1: tudo o que precisamos é que, se ϕx e ψx são proposições equivalentes [*equivalent propositions*] para todos os valores de x , então elas possuem a mesma extensão [*the same extension*] – uma proposição primitiva [*a primitive proposition*], cuja expressão simbólica [*symbolic expression*] de modo algum pressupõe o número 1. A partir disto se segue que, se a e b são ambas extensões [*extensions*] de ϕx , a e b são idênticos [*identical*], o que novamente não envolve formalmente o número 1. Da mesma maneira, outras objeções à definição de Frege podem ser atendidas.

Kerry é conduzido por uma certa passagem (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], nota da p. 80) ao erro de acreditar que Frege identifica um conceito com sua extensão [*identifies a concept with its extension*]. A passagem em questão parece asserir [*to assert*] que o número de u pode ser definido como um conceito “similar a u ” e não como o percurso [de valor] [*range*] deste conceito [*concept*]; mas ela afirma que as duas definições são equivalentes [*the two definitions are equivalent*].

Há uma extensa crítica da prova de Frege de que 0 é um número, a qual revela erros fundamentais quanto à implicação existencial de proposições universais [*the existential import of universal propositions*]. A questão é provar que, se u e v são classes-nulas [*null-classes*], elas são similares. Frege define similaridade [*similarity*] de modo que existe uma relação biunívoca [*one-one relation*] R tal que “ x é um u ” implica [*implies*] em “existe um v para o qual x se associa na relação R ” e vice-versa (já alterei as expressões para se conformarem com a minha linguagem habitual). Isto, diz ele, é equivalente [*equivalent*] a “existe uma relação biunívoca [*one-one relation*] R tal que ‘ x é um u ’ e ‘não existe um termo [*term*] de v para o qual x se associa na relação R ’ não podem ser ambas verdadeiras para qualquer valor que x possa assumir e vice-versa”; e esta proposição é verdadeira se “ x é um u ” e “ y é um v ” são sempre falsas. Isto é tomado por Kerry como absurdo (pp. 287-9). Similaridade [*similarity*] de classes [*classes*], pensa ele, implica [*implies*] que elas possuem termos [*terms*]. Ele afirma que a asserção [*assertion*] de Frege acima se contradiz com uma outra posterior (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 89): “Se a é um u , e nada é um v , então ‘ a é um u ’ e ‘nenhum termo [*no term*] é um v que mantenha a relação R com a ’ são ambas verdadeiras para todos os valores de R ”. Eu não sei exatamente onde Kerry encontra a contradição; mas ele evidentemente não percebe que proposições falsas implicam todas as proposições [*false propositions imply all propositions*] e que proposições universais não

possuem implicação existencial [*universal propositions have no existential import*], de modo que “todo *a* é *b*” e “nenhum *a* é *b*” serão ambas verdadeiras se *a* é a classe-nula.

Kerry objeta (nota da p. 290) contra a generalidade [*generality*] da noção de relação [*notion of relation*] de Frege. Frege assere que qualquer proposição contendo *a* e *b* afirma a relação entre **a** e **b** (*Grundlagen der Arithmetik* [Fundamentos da Aritmética], p. 83); daí, Kerry (acertadamente) conclui que é autocontraditório [*selfcontradictory*] negar [*to deny*] que *a* e *b* estão relacionados. Uma noção tão geral [*so general a notion*], diz ele, não pode ter nem sentido nem propósito [*neither sense nor purpose*]. Quanto ao sentido [*as for sense*], parece um sentido perfeitamente inteligível [*a perfectly intelligible sense*] que *a* e *b* deveriam ambos serem constituintes de uma proposição; quanto ao propósito, toda lógica de relações e, de fato, toda matemática, podem ser aduzidas em resposta. No entanto, há o que parece ser à primeira vista uma refutação formal [*formal disproof*] da perspectiva de Frege. Considere a função proposicional [*propositional function*] “*R* e *S* são relações idênticas [*identical*] e a relação *R* não se estabelece [*does not hold*] entre *R* e *S*”. Isso contém duas variáveis, *R* e *S*; suponhamos que ela é equivalente [*equivalent*] a “*R* tem a relação *T* com *S* [*has the relation*]”. Então, substituindo *T* por ambos *R* e *S*, constatamos, uma vez que *T* é idêntico [*identical*] a *T*, que “*T* não tem relação *T* para *T*” é equivalente a “*T* tem relação *T* para *T*”. Isto é uma contradição, mostrando que não existe uma tal relação [*no such relation*] como *T*. Frege poderia se manifestar contra essa instância tendo por fundamento que ela trata de relações enquanto termos [*relations as terms*]; mas seus percursos duplos [de valor] [*double ranges*], assim como os percursos únicos [de valor] [*single ranges*], que ele sustenta serem coisas [*things*], trarão os mesmos resultados. A questão envolvida é aproximadamente análoga àquela envolvida na Contradição: lá foi mostrado que algumas funções proposicionais com uma variável [*propositional functions with one variable*] não são equivalentes [*equivalent*] a nenhuma função proposicional [*propositional function*] que assira [*asserting*] pertencimento à uma classe fixa [*membership of a fixed class*], enquanto que aqui é mostrado que algumas contendo duas variáveis não são equivalentes [*equivalent*] à asserção de qualquer relação fixa [*the assertion of any fixed relation*]. Mas, no caso de relações, a refutação é a mesma que a do caso precedente. Existe uma hierarquia de relações de acordo com o tipo de objetos que constituem seus âmbitos [*the type of objects constituting their fields*]. Dessa forma, relações entre termos [*relations between terms*] são distintas daquelas entre classes [*classes*], e essas, por sua vez, são distintas da relação entre relações [*relations*]. Assim, nenhuma relação pode assumir ela mesma ambos *referente* [*referent*] e *relatum*, pois, se é ela da mesma ordem que a outra, é preciso que seja de uma ordem superior [*higher order*]

que a da outra; a função proposicional [*propositional function*] proposta é, portanto, sem significação [*meaningless*] para todos os valores das variáveis *R* e *S*.

É afirmado (p. 291) que somente os conceitos [*the concepts*] de 0 e 1, não de objetos [*objects*] propriamente, são definidos por Frege. Mas, se nós permitimos que o percurso [de valor] [*range*] de um *Begriff* [conceito] é um objeto [*object*], isto não pode ser sustentado; pois a atribuição de um conceito [*concept*] vai trazer consigo a atribuição de seu percurso [de valor] [*range*]. Kerry não percebe que a singularidade [*uniqueness*] de 1 foi comprovada (*ib.*): ele pensa que, com a definição de Frege, é possível que existam diversos 1's. Eu não entendo como isso possa ser presumido: a prova da singularidade [*uniqueness*] é precisa e formal.

A definição de sequência imediata na série de números naturais [*immediate sequence in the series of natural numbers*] é também severamente criticada (p. 292 ss.). Isto depende da teoria geral de séries [*the general theory of series*] estabelecida na *Begriffsschrift* [Conceitografia]. Kerry objeta que Frege definiu “*F* é herdado [*inherited*] na série-*f* [*f-series*]”, mas não definiu “a série-*f* [*the f-series*]” ou “*F* é herdado [*inherited*]”. Este último, essencialmente, não possuindo sentido preciso [*no precise sense*], não deveria ser definido; enquanto que aquele anterior é facilmente definido, se necessário, como o âmbito da relação [*the field of the relation*] *f*. Esta objeção é, portanto, trivial. Novamente, há uma investida contra a definição: “*y* segue [*follows*] a *x* na série-*f* [*f-serie*] se *y* possui todas as propriedades herdadas [*inherited*] na série-*f* [*f-serie*] e pertencentes a todos os termos [*all terms*] para os quais *x* possui a relação *f*”⁶². Este critério, nos é dito, é de valor duvidoso, porque não há um catálogo de tais propriedades [*no catalogue of such properties exists*], e mais ainda porque, como prova o próprio Frege, seguir [*following*] *x* é, de fato, uma dessas propriedades, daí um círculo vicioso. Este argumento, a meu ver, engana-se radicalmente quanto à natureza da dedução [*the nature of deduction*]. Em dedução, prova-se que uma proposição estabelece algo acerca de **todos** os membros de uma classe [*every member of a class*] e pode então ser asserida [*asserted*] de um membro particular [*a particular member*]: mas a proposição acerca de **todos** [*concerning every*] não resulta necessariamente da enumeração de todas as entradas em um catálogo [*enumeration of the entries in a catalogue*]. A posição de Kerry envolve a aceitação da objeção de Mill a BARBARA, que a mortalidade de Sócrates é uma premissa necessária [*necessary premiss*] à mortalidade de todos os homens. Certamente, o fato é que proposições gerais [*general propositions*] podem frequentemente ser estabelecidas quando não há qualquer maneira de catalogar os termos da

62 Kerry omite erroneamente a última cláusula; pois nem todas as propriedades herdadas [*inherited*] nas séries-*f* [*f-series*] pertencem a todos os seus termos [*belong to all its terms*]; por exemplo, a propriedade de ser maior que 100 é herdada [*inherited*] na série de números [*number-series*] (N.A.).

classe [*cataloguing the terms of the class*] acerca da qual elas sustentam [*hold*] algo; mais ainda, como nós temos visto abundantemente, proposições gerais [*general propositions*] completamente declaradas [*fully stated*] sustentam **todos** os termos [*hold of all terms*] ou, como no caso acima, **todas** as funções [*all functions*], das quais nenhum catálogo pode ser concebido [*no catalogue can be conceived*]. O argumento de Kerry, portanto, é respondido por uma teoria correta da dedução [*theory of deduction*]; e a teoria lógica da Aritmética [*theory of Arithmetic*] é reivindicada contra suas críticas.

Nota. O segundo volume de *Grundgesetze der Arithmetik* [Leis básicas da Aritmética], que apareceu tarde demais para ser considerado no apêndice, contém uma discussão interessante quanto à contradição (pp. 253-265), sugerindo que a solução deve ser encontrada ao negar que duas funções proposicionais [*propositional functions*] que determinam classes iguais [*equal classes*] devem ser equivalentes [*equivalent*]. Tendo em vista que parece bem provável ser essa a verdadeira solução, é fortemente recomendado que o leitor explore o argumento de Frege neste tema.