PROMETEUS
FILOSOFIA EM REVISTA
PROMETEUS - VIVA VOX - DFL - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Ano 4 – número 8 Julho-Dezembro / 2011

# LEIBNIZ: SIMETRIA E HARMONIA[1]

**Profa. Dra. Raquel Anna Sapunaru**
**Instituto de Ciência e Tecnologia (UFVJM) Campus JK, MG**

**Resumo:** A partir da crítica ao conceito de *força* de Descartes e do advento do *cálculo*, ajuízo que seja possível associar a origem do conceito moderno de *simetria* a Leibniz, ou melhor, ao leibnizianismo. No entanto, diferentemente do matemático Hermann Weyl que pleiteia essa gênese ao *princípio da identidade dos indiscerníveis*, argumento que o conceito de *harmonia*, sustentado pelo *princípio da harmonia preestabelecida* seja, de fato, o princípio inaugurador de *simetria* atual, e, em particular, do conceito de *simetria de translação*, também conhecido como *simetria de espaço*.

**Palavras-chave:** Leibniz. Simetria. Harmonia. Indiscerníveis.

**Abstract:** Starting from the criticism to the concept of *force* in Descartes and from the advent of the *calculus* I state that it is possible to associate the origin of the modern concept of *symmetry* to Leibniz, or better yet, to leibnizianism. However, differently from the mathematician Hermann Weyl, that relates this genesis to the *principle of the identity of the indiscernible*, I argue that the concept of *harmony* sustained by the *principle of previously established harmony* is the, *de facto*, starting principle of modern *symmetry*, and, in particular, of the concept of *translation symmetry* also known as *spatial symmetry*.

**Keywords:** Leibniz. Symmetry. Harmony. Indiscernible.

[1] Agradeço a FAPEMIG, a oportunidade de apresentar o presente trabalho no 14TH CONGRESS OF LOGIC, METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE.

## Introdução: Leibniz responde por que Descartes errou e mostra como a dinâmica se associa à sua ideia de harmonia

Alguns anos após a publicação do texto *Brevis Demonstratio*, Leibniz observou que as pessoas começavam a aceitar que a força não poderia ser definida como *mv*, como queria Descartes, mas sim, como $mv^2$ (LEIBNIZ, 1991, p.xxiv-xxviii). No entanto, esse fato gerava para Leibniz um grande desconforto, pois as mesmas pessoas que aceitaram a mudança da definição de força de *mv* para $mv^2$ não acreditavam que esta nova força, $mv^2$, conservava-se da mesma forma que a quantidade de movimento cartesiana, *mv*, ou seja, de modo absoluto. Sob esta luz, corroborando a análise do comentador Rutherford no livro *Leibniz and the rational order of nature* sobre a importância da *harmonia* na Filosofia de Leibniz (RUTHERFORD, 1998, p.214), creio ser de suma importância mostrar que as derrocadas da ideia cartesiana de força conjuntamente com o advento do cálculo representam o motor do *princípio da harmonia preestabelecida* leibniziano. Sem a compreensão da gênese destes eventos não poderei fundar a hipótese de que o *princípio da harmonia preestabelecida* e não o *princípio da identidade dos indiscerníveis* constitui a base do conceito moderno de *simetria*. Nesse sentido observo que Leibniz não foi uma exceção em seu tempo: juntamente com outros pensadores do século XVII, este filósofo tinha a visão de um universo eterno, de uma máquina perfeita, que se conservava integralmente. Penso que esta visão do mundo mecânico perfeito, onde a *conservação* e o *absoluto* eram as principais palavras de ordem, serviu de palco para as definições cartesianas, newtonianas e leibnizianas de força e movimento. Contudo, contrariamente ao ocasionalismo do cartesiano Malebranche, a mente de Leibniz buscava uma quantidade de força e movimento que se conservasse absolutamente, sem interferência externa, isto é, sem a constante intervenção de Deus. Foi assim que a grande objeção de Leibniz aos cartesianos se converteu em sua demonstração de que *mv*, de fato, não se conservaria absolutamente enquanto força, mas somente enquanto quantidade de movimento. Nesta objeção de Leibniz a Descartes, escondiam-se também as diferentes concepções de movimento destes filósofos.

Na perspectiva exclusiva do seu conceito de força ou, como às vezes era chamada por Leibniz, da quantidade de potência, a contínua operação da máquina universal demandava a conservação da força e, a seu turno, a conservação da força demandava que o efeito fosse sempre igual à potência da causa. No texto *Elementa Physicae*, escrito entre 1684 e 1686, Leibniz pondera sobre um conceito especial, a saber: o *movimento contínuo físico*. Este movimento perpétuo seria equivalente à auto-sustentação do universo e sua existência não teria lugar no mundo leibniziano, pois não haveria efeito sem causa e, portanto, o moto-contínuo seria um despropósito. Para Leibniz: "[...] se esta força viva pudesse aumentar alguma vez, o efeito seria mais potente que a causa, e se daria o movimento mecânico perpétuo, quer dizer, o que poderia reproduzir sua causa e algo mais, o que seria um absurdo." (LEIBNIZ, GM VI, p.219-220) Segundo Leibniz, o moto-contínuo, se existisse, exibiria uma criação *ex nihilo* no mundo físico, em cada um de seus ciclos, eternamente. Porém, a crítica de Leibniz ao movimento de Descartes não parou por aqui. O filósofo alemão acreditava que as sete leis cartesianas do impacto estavam incorretas. Inicialmente, em 1671, Leibniz propôs uma alternativa a estas leis em sua *Hypothesis Physica Nova*, porém, abandonou esta idéia e passou a tratar suas objeções a Descartes de maneira semelhante à de Huygens, seu amigo e mentor, à exceção de um ponto crucial: enquanto Huygens rejeitava as leis do impacto de Descartes *somente* devido às suas contradições físicas, teóricas e experimentais, Leibniz as rejeitava *também* devido aos seus pressupostos filosóficos que, segundo ele, não suportavam tais conclusões. Ressalto que a crítica leibniziana à física cartesiana do impacto, sob a luz do *princípio da continuidade*, permanece válida até os dias de hoje. Particularmente, sobre o *princípio da continuidade*, Leibniz o concebe como um princípio de ordem geral, necessário à geometria e aplicável a física, pois Deus agiria como um perfeito geômetra na criação das coisas (LEIBNIZ, GP VII, p.191). Além desse princípio, era preciso afiançar que houvesse também uma equivalência entre a causa plena e o efeito inteiro, pois somente o *princípio da continuidade* não garantia a inexistência de um efeito maior que a causa geradora do movimento, isto é, de uma criação *ex nihilo* no mundo físico (LEIBNIZ *apud* COSTABEL, 1973, p.42-43). Logo, era necessário o uso de outro princípio que fornecesse a perfeita *harmonia* das mudanças físicas e metafísicas do movimento. No texto *Animadversiones in partem generalem prinipiorum cartesianorum*, parte II, artigo 36, Leibniz ponderou: "Pois a potência de uma causa é igual à de seu efeito inteiro, quer dizer, o que aquela produz ao consumir sua potência.” (LEIBNIZ, GP IV, p.371). Em vista deste princípio, o movimento observável seria conhecido pela *vis viva* e pela relação causa-efeito, originado por ela. De acordo com o comentador Moreau em seu livro *L'univers Leibnizien*, o principal agravo de Leibniz com relação às leis do movimento de Descartes seria devido à violação frontal das exigências do *princípio da continuidade* e do *princípio da equivalência*. (MOREAU, 1956, p.126-128, 137-138) Leibniz, nos *Animadversiones in Partem Generalem Prinipiorum Cartesianorum*, parte II, artigos 40-44, critica as regras do impacto de Descartes mencionando um critério geral que seria aplicado, indistintamente na análise dessas regras e baseado nesses dois princípios. (LEIBNIZ, GP IV, p.373-375) Para Leibniz, quando dois corpos supostamente diferentes se aproximassem contínua, física, geométrica ou metafisicamente, *até que um fosse como o outro*, seria preciso também que as consequências, ou melhor, que os efeitos que essa aproximação causasse em ambos os corpos se justapusessem gradativamente até que houvesse uma coincidência total. Leibniz, na parte II, artigo 45, desse mesmo texto, utilizou-se da geometria para exemplificar esta hipótese e disse que se em uma elipse um de seus focos ficasse imóvel e o outro se afastasse continuamente, as infinitas elipses que se formariam a partir deste afastamento estariam se aproximando continuamente de uma parábola até que, finalmente, quando a distância entre os focos fosse abissal, chegariam a ser, de fato, iguais a uma parábola (LEIBNIZ, GP IV, p.375-376). Igualmente, seria possível pensar na parábola como uma elipse cuja distância entre os focos tenderia ao infinito, pois todas as propriedades da elipse poderiam ser verificadas na parábola. Leibniz continua sua explanação afirmando que o movimento dos corpos diminui continuamente e termina por se reduzir ao repouso. Deste modo, a desigualdade entre os corpos se converte em igualdade perfeita, de maneira que o repouso pode ser considerado um movimento infinitamente pequeno ou uma lentidão infinita, e a igualdade como uma desigualdade infinitamente pequena. Prontamente, Leibniz alerta para o fato que tudo que se queira demonstrar sobre o movimento deve também ser verificado sobre o repouso. O mesmo ocorreria para a igualdade e a desigualdade, de maneira que uma regra sobre o repouso ou sobre a igualdade poderia ser concebida, de certo modo, como um caso especial de uma regra sobre o movimento ou a desigualdade. Se assim não o for, de acordo com Leibniz, poder-se-ia assegurar que tais regras estavam incorretas e mal concebidas, como as de Descartes (LEIBNIZ, GP IV, p.375-376).

Leibniz analisou o impacto dos corpos em termos de sua dinâmica, que pode ser entendida também como uma revisitação da *dynamis* grega através da *vis viva*. Fundamentalmente, para Leibniz, o choque verdadeiro entre corpos seria perfeitamente elástico, pois a natureza não daria saltos, mas isto não significa dizer que ele ignorava a existência de choques inelásticos de diferentes graus. Leibniz também rejeitou a idéia cartesiana da distinção entre quantidade e determinação do movimento, pois ele acreditava, veementemente, que a quantidade e a determinação do movimento, de fato, completavam-se: no pensamento leibniziano, um corpo tende a conservar sua determinação juntamente com toda sua força e toda sua quantidade de movimento. Assim, o que o corpo perderia em velocidade, após o choque, perderia também em determinação. Além disso, na visão de Leibniz aceita até os dias de hoje, seria necessária uma grande resistência ao movimento para fazer ricochetear um corpo, ou seja, esta resistência teria que ser muito maior do que aquela necessária para pará-lo de vez. A determinação, para Leibniz, se comportaria como o movimento: só poderia ser alterada perante a ação de uma força viva. Logo, diferentemente de Descartes, Leibniz tinha uma noção da natureza vetorial da quantidade de movimento, isto é, esta grandeza para ele não seria somente escalar, pois teria direção e sentido. Em suma: para Leibniz, Descartes deveria ter levado em conta todos os casos, todas as direções e todos os sentidos antes e depois dos choques e, somente a partir daí, ter formulado as regras gerais. De acordo com Leibniz, nas verdadeiras regras que regem o movimento, a coincidência entre a razão e a experiência seria visível e, principalmente, admirável. Portanto, a proposta de Leibniz era bem mais simples e ampla que a de Descartes. Segundo Leibniz, se um corpo *C* se choca com um corpo *B*, e este está em repouso, poderão acontecer três, e somente três, situações distintas, a saber:

1. *C* prossegue seu movimento, arrastando *B*, se força de *B* < *força de C*;
2. *C* para de vez se força de *B* = *força de C*;
3. *C* ricocheteia, não necessariamente com a mesma velocidade de início, se força de *B* > *força de C*;

Finalmente, no *Essay de Dynamique*, em 1692, Leibniz expressa suas regras do impacto em três equações gerais, chamadas pelo próprio filósofo de *equações da beleza* (LEIBNIZ, GM VI, p.227-228).

Considerando:

A) *a* e *b* são as massas dos corpos *A* e *B* respectivamente;

B) $v$ é a velocidade do corpo $A$ antes do impacto;

C) $x$ é a velocidade do corpo $A$ depois do impacto;

D) $y$ é a velocidade do corpo $B$ antes do impacto;

E) $z$ é a velocidade do corpo $B$ depois do impacto;

F) Velocidades opostas são indicadas por sinais opostos, + ou -.

Temos:

i. Equação Linear: $v - y = z - x$: esta equação expressa uma conservação da causa do impacto ou a conservação da velocidade relativa; ela expressa a elasticidade perfeita, contrária à não-elasticidade cartesiana;

ii. Equação Plana: $av + by = ax + bz$: esta equação expressa uma quantidade de progresso (LEIBNIZ, GM VI, p.218) total de dois corpos ou a lei da conservação da direção; ela é idêntica à conservação do *momentum* da física contemporânea e difere da conservação da quantidade de movimento cartesiana ao reconhecer explicitamente o caráter vetorial deste fenômeno; ela difere da equação linear porque pode ser aplicada não somente ao choque perfeitamente elástico, mas também ao aproximadamente elástico e ao perfeitamente inelástico (KITTEL; KNIGHT; RUDERMAN, 1965, p.69-73);

iii. Equação Sólida: $avv + byy = axx + bzz$: esta equação expressa uma conservação da força total absoluta, a *vis viva*, $mv^2$.

O próprio Leibniz, ainda no *Essay de dynamique*, após definir estas equações, escreveu: "Ainda que apresente estas três equações pela beleza e pela *harmonia*, não obstante bastariam duas delas para dar conta da necessidade. Porque, se eu tomasse destas equações duas quaisquer, poderia inferir delas aquela que está faltando." (LEIBNIZ, GM VI, p.228). Considero que a *harmonia* exige que sejam escritas as três equações, mas, segundo Leibniz, na análise desta questão, do ponto de vista da *necessidade*, só seria preciso escrever duas delas para que fossem obtidas todas as informações sobre o movimento dos corpos e suas implicações (SERRES, 2001, p.486). Sendo assim, por que manter as três equações em vez de duas? Por que optar pela *harmonia* e não pela *necessidade*? Porque manter as três equações torna o sistema de Leibniz completo e, principalmente, *simétrico*. Desse modo, a *simetria* se apresenta como um elemento de suma importância para a compreensão do leibnizianismo. De acordo com Leibniz, é dita *harmônica* toda configuração que unifica uma idéia relacional. Na letra de Serres: "Ao manter as três leis, será possível circular entre elas por relações diretas e inversas." (SERRES, 2001, p.487) Leibniz tinha plena consciência de que as três equações não eram independentes entre si. Ao multiplicar a primeira pela segunda, obtêm-se a terceira, e ao dividir a terceira pela primeira ou pela segunda, obtêm-se a que não foi usada como divisor da operação.

**Parte I: O papel do cálculo infinitesimal de Leibniz na construção da sua dinâmica, no aprofundamento de sua crítica aos cartesianos e na consolidação da ideia de harmonia**

Penso que a ideia de *harmonia* no leibnizianismo é fruto da combinação da sua dinâmica com o advento dos cálculos diferencial e integral; e, os quais, agindo concomitantemente, seriam os principais responsáveis pelo conceito moderno de *simetria*. Essa hipótese se encontra descrita no livro do comentador Rutherford, previamente citado (RUTHERFORD, 1998, p.201). Ajuízo também que na ideia de Leibniz, a invenção dos cálculos atuou como o principal instrumento na sua análise do contínuo, na derrubada das sete regras do impacto de Descartes e na formulação de sua dinâmica. O cálculo leibniziano nada mais era que a ferramenta que faltava para Leibniz justificar, baseando-se na certeza matemática, toda a física e a metafísica de seu sistema. As relações entre as pequenas percepções, o espírito e a mônada, entre outros elementos do leibnizianismo, tornaram-se grandiosas após o surgimento do cálculo e, simultaneamente, ao aprimorar o uso dessa poderosa ferramenta matemática, Leibniz pode dar uma nova interpretação, mais genérica, às seguintes operações, a saber: a) a passagem da aceleração à velocidade e desta ao espaço no estudo do movimento (LEIBNIZ, 1995, p.101-103); e, consequentemente, b) a passagem da força viva para a força morta, e vice-versa, germinando o que se tornou a *lei de conservação da energia mecânica*. No gráfico da Figura 2a, vê-se, particularmente, a área delimitada pela curva da velocidade de um móvel, que no caso do movimento retilíneo uniforme, *MRU*, é uma reta, ao se considerar o eixo $x$ como o tempo e o eixo $y$ como a velocidade (KITTEL; KNIGHT; RUDERMAN, 1965, p.63-69). A reta representa a variação da velocidade de um corpo com velocidade constante. A área total do retângulo formado por essa reta e o eixo $x$ equivale à soma de uma infinidade de superfícies infinitesimais, definidas uma a uma pelo cruzamento infinitesimal da abscissa, tomado em uma porção ínfima, $dx$, e a ordenada, $y$. Cada uma dessas superfícies essenciais pode ser criada pelo produto $y.dx$, pois a área da figura que se forma é um retângulo. Em outras palavras, cada área infinitesimal *y.dx* representa uma porção do espaço que o corpo percorreu, e a soma destes espaços divididos pelos tempos infinitesimais gastos para percorrê-los nos dá a velocidade representada pela reta. Logo, a totalidade dessa superfície concebida pelo retângulo será dada pela soma infinita dessas infinitas superfícies essenciais, ou melhor, pela soma dos infinitos retângulos essenciais: ao ato de somar infinitamente os *essenciais*, Leibniz chamou de integrar e ele o representou pelo símbolo $\int$. Por conseguinte, o resultado que é observado na Figura 2a representa o movimento retilíneo uniforme que nos é dado tanto pela nossa intuição geométrica, quanto via álgebra (LEIBNIZ, GM IV, p.91-92). Na Figura 2b, se consideradas as mesmas definições para os eixos *x* e *y*, ou seja, *x* representando o tempo e *y* a velocidade, obtém o movimento retilíneo uniformemente variável, *MRUV*. Neste caso, a figura que se forma é um trapézio retângulo. Esta curva representa a variação da velocidade de um corpo móvel com velocidade variável e aceleração constante. A área total formada por ela e o eixo *x* equivale à soma de uma infinidade de superfícies infinitesimais, definidas uma a uma pelo cruzamento infinitesimal da abscissa *x*, tomada aqui em uma porção ínfima *dx*, e a ordenada *y*. Ao converter a notação leibniziana do cálculo infinitesimal para os dias de hoje, pode-se expressar essas funções da seguinte forma: a) Espaço ou Posição = *s*; b) Velocidade = *ds/dt* e c) Aceleração = $d^2s/dt^2$. Assim sendo, a velocidade, *v*, pode ser definida como a variação do espaço dividida pela variação do tempo e, nesse caso, *d*, representa a variação infinitesimal, *s*, a posição e *t*, o tempo.

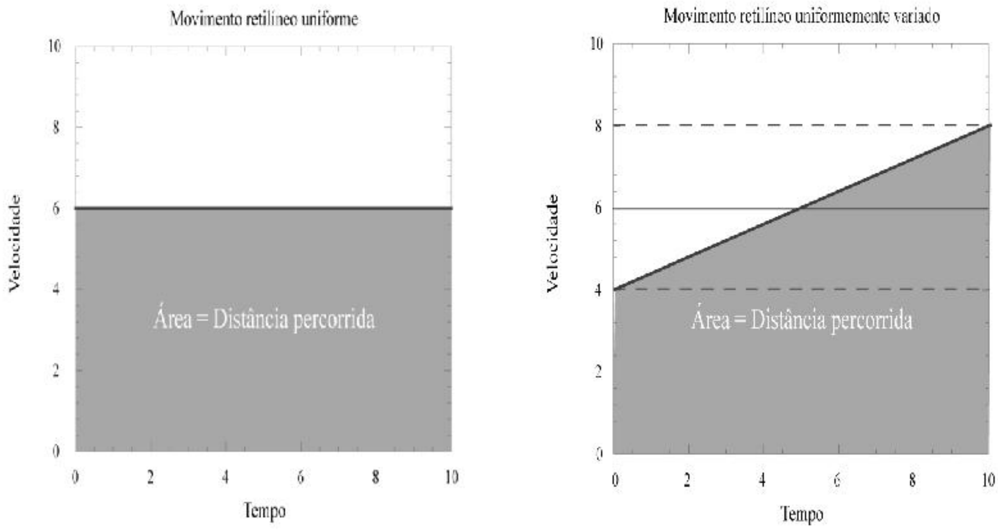


**Figura 2a:** o eixo x representa a variação do tempo; o eixo y representa a variação da velocidade; a reta representa um corpo deslocando-se em MRU.
**Figura 2b:** o eixo x representa a variação do tempo; o eixo y representa a variação da velocidade; a reta representa um corpo deslocando-se em MRUV.[2]

Analogamente, do mesmo modo que o inverso da soma é a subtração e o da multiplicação é a divisão, o inverso da derivada é a integral (LEIBNIZ, 1995, p.137-138). Logo, com o advento do cálculo foi possível partir da posição e chegar à aceleração e vice-versa. Antes do estabelecimento dos cálculos não era factível pensar nesses termos, e é por isso que a originalidade das operações de diferenciar e integrar não estariam somente em seu simbolismo ou facilidade: elas estariam, principalmente, em sua conceituação. Inobserváveis, os infinitamente pequenos movimentos embrionários leibnizianos, metafísicos, ao serem integrados, tornar-se-iam observáveis e físicos. O mais contundente exemplo dessa movimentação físico-metafísica, proporcionada pelos cálculos, encontra-se no impacto dos corpos rígidos, assunto da crítica de Leibniz aos cartesianos. Segundo Leibniz, nos textos escritos após a invenção dos cálculos diferencial e integral, o movimento local passou a ser definido como uma *mudança de lugar* e não mais como uma *mudança de espaço*, conforme dito no *Theoria Motus Abstracti* (LEIBNIZ, GP IV, p.229). As novidades introduzidas por Leibniz em seu sistema que culminariam no estabelecimento de sua dinâmica não pararam por aí: a velocidade infinitesimal, ou diferencial, ou aquela tomada da quantidade de movimento

[2] Figura gentilmente cedida pelo Professor Vitorvani Soares do Instituto de Física da UFRJ.

*mv*, tornou-se a soma de uma seqüência infinita de *conatus* (HOBBES *apud* COSTABEL, 1973, p.17), enquanto que a velocidade observável, com direção e sentido, tomada da força viva, $mv^2$, tornou-se o *impetus* (LEIBNIZ, GM VI, p.237). *Grosso modo*, a *vis viva* tem como causa primeira a soma infinita dos *conatus*, transformados em *impetus* (COSTABEL, 1973, p.102-103). Sobre o *conatus* e o *impetus*, o comentador Gueroult afirma que: "O *impetus* nasce da integração dos *conatus*. Assim, o *conatus* é virtualidade, e o *impetus* atualidade." (GUEROULT, 1967, p.35) Em outras palavras, o *impetus* é a quantidade de impulso ou quantidade de *conatus*, *motio*, e não de movimento, *motus*. No texto *Dynamica de Potentia et Legibus Naturae Corporeae*, quinta seção, capítulo 1, Leibniz esclarece que o *conatus* representa o aumento infinitesimal da velocidade, enquanto o *impetus* representa a velocidade em si, visto que o primeiro não depende do tempo por ser uma unidade infinitesimal, e o segundo é a soma do primeiro ao longo do tempo. Para Leibniz, o erro de Descartes se deu na formulação de suas regras do impacto. O filósofo francês não considerou os aspectos infinitesimais da velocidade, isto é, Descartes não levou em conta que a velocidade percebida era a soma das infinitas infinitamente pequenas unidades de velocidade. Leibniz conclui que por mal interpretar a metafísica oculta no choque entre dois corpos, Descartes se equivocou na formulação de quase todas as suas regras: para ele os corpos se chocavam e, descontinuamente, ricocheteavam em proporções imprecisas, como que por encanto. Como suporte metafísico contrário à hipótese cartesiana, encontro o *princípio da continuidade*, e por trás dele está a grande crítica leibniziana ao cartesianismo como um todo, a saber: a natureza não dá saltos. Por essa razão, acredito que o cálculo diferencial e integral tenha sido usado por Leibniz com o objetivo de unir a física à metafísica, no que tange a dinâmica. Leibniz teria usado seu cálculo, não só para resolver interessantes questões matemáticas de sua época, mas também como o *cimento* que colaria, novamente, aquilo que Descartes descolou em sua tentativa de romper com os dogmas escolásticos (LEIBNIZ, GP IV, p.109). O cálculo seria, acima de tudo, um instrumento capaz de trazer à tona o que se ocultava na mecânica passível de uma medida direta. Novamente, ressalto o cuidado de Leibniz com a questão da *harmonia*. A criação de um instrumento capaz de viabilizar ideias metafísicas através da física demonstra o grau de importância do conceito de *harmonia* no leibnizianismo.

## Parte II: A relação entre simetria, dinâmica e espaço físico no leibnizianismo

Complementando esta discussão, é na relação entre a dinâmica e o espaço que se dá o coroamento do sistema leibniziano enquanto sistema filosófico. Isto porque é através dessa poderosa relação que se pode observar o *princípio da harmonia preestabelecida* de um ângulo privilegiado, decisivo para a compreensão plena do leibnizianismo e do nascimento do conceito moderno de *simetria*. O termo *simetria* é de origem grega e, etimologicamente, significa "algo com medida perfeita". Todavia, ao longo da história da humanidade, a *simetria* não permaneceu restrita ao seu significado original. Com o passar dos séculos, o significado deste termo ampliou-se e foi se adequando a diversos contextos, como os das ciências e os das artes. No entanto, a *simetria* não é um número ou uma fórmula mágica de combinação: ela é uma propriedade das figuras, uma transformação, isto é, o resultado de um princípio, de um movimento que se comporta de acordo com uma regra. Portanto, a *simetria* resguarda a forma e conserva características próprias das figuras, tais como ângulos, comprimento dos lados, distâncias, tipos e tamanhos; e, jamais altera a posição do objeto. Deste modo, a *simetria* conserva mais do que a própria identidade do objeto: ela preserva sua relação com todo o resto e resguarda a *harmonia* de um conjunto. Sabe-se que a Filosofia de Leibniz sempre primou pela ordem e pela beleza, características evidentes de qualquer sistema simétrico. Com este espírito, o matemático Hermann Weyl em seu livro *Symmetry*, de 1952, definiu o conceito geral de *simetria* como "[...] uma ideia pela qual o homem através dos tempos tem tentado compreender e criar ordem, beleza e perfeição." (WEYL, 1952, p.5) Porém, é a quebra de *simetria* que está no núcleo daquilo que é observável, no cerne do interesse da física. Por exemplo, é através da quebra de *simetria* que o movimento acontece e, como no leibnizianismo o repouso absoluto é uma ilusão, esta quebra incessante da *simetria* estaria ligada ao estado perpetuamente harmônico do mundo. Na quebra ininterrupta da *simetria* dar-se-ia a desordem na ordem. Assim, tentarei mostrar que, do mesmo modo que o *princípio da continuidade* é pressuposto metafísico da *lei da conservação da energia mecânica*, o *princípio da harmonia preestabelecida* estaria na origem do conceito físico-matemático de *simetria*.

Sob uma perspectiva mais arrojada, o matemático Weyl acerca da concepção de *simetria*, afirma que algo é simétrico se e somente se este algo é passível de uma mudança em um aspecto singular que não implique uma mudança no seu aspecto geral (WEYL, 1952, p.45). Logo, segundo Weyl, a identidade de um objeto está intimamente ligada a sua *simetria*, ou seja, ao grupo de transformações a que ela pertence. A partir das contribuições de Weyl, observo que pensar em *simetria* é refletir também sobre noções de identidade, pois mesmo havendo transformações, algo de essencial no objeto deverá ser mantido, respeitado, inalterado. Porém, isto não seria tudo: argumento que a identidade seria somente um dos aspectos da *simetria*, mas ela não explicaria o seu estado da arte. Daí, a definição de Weyl parece-me perfeita sob a luz das ciências formais. No âmbito restrito da matemática, pode-se considerar que uma imagem *A'* obtida através da reflexão do objeto *A*, tendo como eixo de reflexão uma reta *r*, satisfaz a seguinte condição, a saber: dado um ponto *A*, a sua imagem refletida, o ponto *A'*, estará sobre a reta *AA'*, perpendicular a *r*, interceptando-a no ponto *p*; sendo *p* equidistante de *A* e de *A'* (WEYL, 1952, p.45-48). Contudo, esta idéia matemático-intuitiva inculcada por Weyl se encaixa parcialmente na ontologia de um mundo verdadeiramente simétrico. O conjunto harmonioso do todo transcende a intuição matemática, a intuição artística, a matemática formal e a própria identidade das coisas de um modo peculiar, visto que ele agrega estes e outros tantos aspectos em um só, transformando-os naquilo que entendo por *simetria* em seu estado da arte. No leibnizianismo os elementos físicos e metafísicos são fortemente dependentes um do outro, em geral (LEIBNIZ, 2001, p.31). Assim, observo que da teologia à dinâmica, passando pela ética, geometria, linguagem e, até mesmo a epistemologia, todos eles abordam uma conexão físico-metafísica. Não obstante, como se processaria esta improvável conexão, seja no pensamento leibniziano, seja em qualquer outro pensamento, ainda é um assunto passível de discussão. Neste sentido, fazendo uma limitação do escopo de investigação, questiono: Qual seria, para Leibniz, o melhor predicado para a relação que há entre os dois aspectos distintos e primordiais do humano, isto é, o corpo e o espírito? *Grosso modo*, a resposta seria: a relação leibniziana entre o corpo e o espírito é mandatoriamente harmoniosa, garantida pelo *princípio da harmonia preestabelecida*. A idéia de uma *harmonia* necessária entre as coisas é clara na Filosofia leibniziana e parece ter sua origem, segundo o historiador Le Roy, na carta de Leibniz a Arnaud, datada de 21/31 de outubro de 1686: "A hipótese da concomitância é uma continuação da noção que eu tenho da substância.” (LEIBNIZ, 1988, p.138) Segundo Le Roy, a idéia da *harmonia* surge a partir da nova definição de substância leibniziana, ou seja, da noção completa estabelecida no *Discurso de Metafísica*, §9, pois, por esta definição, a substância conteria todos os predicados que exprimiriam a totalidade do universo a partir de seu ponto de vista (LEIBNIZ, 1974, p.83). Logo, este novo conceito de substância serviria, principalmente, para harmonizar o conjunto das coisas existentes no mundo. Além disso, Leibniz relaciona abertamente os conhecimentos matemáticos às questões que envolvem a noção de substância, como, por exemplo, a questão das pequenas percepções e dos diversos níveis de percepções. Sobre este aspecto particular do pensamento leibniziano, Leibniz argumenta que inúmeras pequenas percepções atingem nosso espírito a todo instante e, para que os humanos se apercebam claramente delas, é necessário separar os diferentes conjuntos de percepções. A partir daí, deve-se integrá-los até que se passe da confusão causada pela mistura das diversas percepções à clareza do isolamento desses conjuntos de apercepções. Assim, ainda usando o exemplo de Leibniz, se os seres humanos pudessem separar à beira-mar, as pequenas percepções da onda que se forma, de outras pequenas percepções quaisquer, eles ouviriam claramente o vagalhão quebrando na areia, caso contrário, este será mais um ruído na confusão da audição (LEIBNIZ, 1988, p.8). Por conseguinte, a representação matemática do que acabei de argumentar seria uma série convergente, ou seja: $lim_{n\to\infty} S_n = S_{finito}$, onde $S_{finito}$ expressa o som da onda quebrando na areia, isolado dos outros ruídos (LEIBNIZ, 1995, p.39-41).

Outra discussão interessante sobre o conceito leibniziano de *harmonia* foi feita pelo comentador Rutherford em seu livro *Leibniz and the rational order of nature*, já mencionado. Segundo Rutherford, a *harmonia* é a justa proporção das coisas, a unidade na multiplicidade ou a heterogeneidade compensada pela identidade. Neste sentido infiro que desvendar o encanto ou vivenciar o conforto em algo é compartilhar tanto de sua *harmonia*, quanto de sua variedade contrabalançada pela semelhança deste algo em meio ao todo. Assim sendo, corroboro a idéia de Rutherford sobre a existência de um sistema harmônico e harmonioso, onde reinaria a concomitância ou a hipótese dos acordos, todas as coisas ou eventos do universo conspiram em conjunto para a obtenção do melhor (RUTHERFORD, 1998, p.13-14). Todavia, foi com no advento da dinâmica que a *harmonia preestabelecida* tomou vulto. Isto não se deu somente porque Leibniz substituiu a força cartesiana, $mv$, pela sua força, $mv^2$, mas principalmente porque provou que a *quantidade de progresso* e não a *quantidade de movimento* é que se conservava. Sua conservação foi autenticada pelas três equações do movimento já apresentadas, de modo que não se pode alterar nem a velocidade, nem a direção, nem o sentido de um corpo em movimento sem o uso da força. No §17 da *Monadologia*, de 1715, Leibniz disse que não seria possível explicar as coisas como elas são a partir de figuras e movimentos, ou seja, do mecanicismo puro, conforme queria Descartes e os cartesianos: "Aliás, deve-se confessar que a percepção e o que dela depende, é inexplicável, por razões mecânicas, isto é, por figuras e movimentos." (LEIBNIZ, 1974, p.64.) Segundo Leibniz, precisar-se-ia muito mais do que o proposto por Descartes para explicar algo tão complexo. A explicação verdadeira estaria fundada na *harmonia preestabelecida* existente entre o corpo e a alma refletida ou expressa em todas as coisas, pois tudo está em conexão com tudo, visto da perspectiva da mônada. Penso que, no entendimento de Leibniz, a *harmonia preestabelecida* seja uma condição *sine qua non* da busca e, quiçá, do alcance da perfeição: uma coisa perfeita não seria aquela que tivesse um caráter absolutamente melhor, mas a que melhor compusesse o todo. Isso explicaria por que no leibnizianismo é possível estabelecer o cálculo a partir da teoria das percepções, e essa teria como origem a metafísica da substância, etc. As partes do sistema leibniziano estão sempre em *harmonia* e, logo, se comunicam e se completam, vide as *equações da beleza*. Resumidamente, Leibniz relaciona seu sistema com um tipo de beleza harmônica rumo à perfeição e desta relação surge a questão: No leibnizianismo, estar em *harmonia* seria também estar em *simetria*? Para responder a esta pergunta, tratarei daqui por diante o termo *simetria* como uma *harmonia* resultante de combinações específicas e proporções regulares; e analisarei a *simetria de translação*, na qual é possível mudar a posição de um corpo, deixando imutáveis suas características. Nesta *simetria* sublinho, por exemplo, que ela não é unicamente uma consequência das propriedades do objeto, visto que ela depende de propriedades do espaço. O matemático Weyl, em seu livro *Symmetry*, analisou especialmente as *simetrias de espaço*[3] e as associou ao *princípio da identidade dos indiscerníveis* de Leibniz. De acordo com Weyl, a *simetria* enquanto *harmonia* não se aplica às *simetrias de espaço*, tese da qual discordo, visto que meu intuito é chegar a esta *simetria* pela via do *princípio da*

[3] Weyl, de fato, analisou no seu livro *Symmetry* as *simetrias de espaço* que englobam a *simetria de translação* e a de *rotação*. A *simetria de espaço* é também conhecida como *simetria geométrica*.

*harmonia preestabelecida* e não pelo *princípio da identidade dos indiscerníveis* como propôs o matemático. (WEYL, 1952, p.3)

**Conclusão: A simetria do corpo, da força e de translação na base do leibnizianismo**

Um homem lindo e uma mulher linda, juntos, têm um filho feio. Como? Os olhos do bebê são lindos, seu nariz perfeito, a boca sem defeitos, mas a criança é feia. Por quê? Do mesmo modo que a soma das partes não é igual ao todo, olhos, nariz e boca bonitos não garantem um rosto soberbo: é necessário que as partes belas se combinem de tal modo que o cérebro de quem as vê, conjuntamente, aprecie a beleza que se coloca (WEYL, 1952, p.4). Por isso, é mister que essa combinação seja *simétrica*, isto é, tem que haver uma *simetria* definida entre as partes para que o belo, revelado no todo, seja reconhecido como tal. Sabe-se que o conceito de beleza envolve várias coisas como a época em que ele foi estabelecido, a sociedade que o estabeleceu, a cultura vigente, entre outros fatores, cuja complexidade e dificuldade para uma definição completa são patentes. Contudo, sabe-se que os humanos apreciam de modo particular as formas e tudo mais que seja simétrico: a *simetria* os remete a um tipo de conforto, um equilíbrio que se aproxima da perfeição. A seu turno, há outra maneira de se entender a *simetria*. Essa maneira se resume em imaginar um objeto que mantém a mesma forma quando sofre uma ação qualquer. Por exemplo: toma-se uma superfície plana e nela se coloca, primeiramente, uma esfera. Na sequência, gira-se a esfera em torno de qualquer eixo, com qualquer ângulo. Após o giro, observa-se sempre a mesma coisa. No entanto, se no lugar da esfera é colocado um cubo e, se este é girado em torno de um eixo que passa por uma de suas faces, num ângulo diferente de $90^o$ ou de um múltiplo deste, não se obterá a mesma visão obtida no giro da esfera. Logo, a esfera é uma figura que apresenta uma *simetria* dupla: a de repouso e a de rotação, enquanto que o cubo tem uma *simetria* de repouso e uma de rotação restrita a $90^o$ e múltiplos deste. Assim, observo que as coisas que me cercam possuem diferentes critérios de *simetria* que se relacionam comigo e entre elas mesmas. Portanto, ao tentar relacionar os conceitos de *harmonia* e beleza em Leibniz com o conceito de *simetria*, pretendo trazer à tona mais uma das marcas inconfundíveis do leibnizianismo. Em outras palavras, minha intenção é mostrar que a idéia metafísica de uma *harmonia preestabelecida*, com todas suas implicações, poderia ser o pressuposto metafísico da *simetria* moderna, nascida no fim do século XVIII.

O conceito primitivo de *simetria* é bem antigo e seu significado se assemelhava mais ao nosso conceito de proporção do que à *simetria* moderna. A palavra *symmetros* é composta dos termos *sym* e *metron* que, juntos, em termos espaciais, significam *da mesma medida que; proporcional; que se harmoniza com*. A *simetria* antiga foi associada à beleza e à matemática tanto por Platão quanto por Aristóteles, e esse significado persistiria até o fim da Renascença. O significado atual de *simetria* nasceu no século XVIII e pode ser entendido como uma imunidade de algo a qualquer alteração que este algo venha a sofrer (WEYL, 1959, p.3). Formalmente, existe *simetria* se uma mudança num dado sistema mantém as características essenciais deste sistema inalteradas. *Grosso modo*, a *simetria* é uma característica de algo que pode ser observada em algumas formas geométricas e em equações físico-matemáticas. Para Weyl o conceito de *simetria de espaço* se fundamenta em dois conceitos, a saber: o de *isometria* e o de *invariância de uma figura por um grupo de isometrias*. Em suma, no âmbito da *simetria de espaço*, três elementos interfeririam de modo indissociável: 1) a transformação isométrica; 2) a figura geométrica e 3) a invariância dessa figura em face da transformação. Assim, diz-se que uma figura $F$ é simétrica a uma transformação isométrica $T$ se $F$ é invariante por $T$, isto é, se a transformação aplicada à $F$ tem como imagem a própria figura: $F(T(F)=F)$ (WEYL, 1959, p.41-43). Isso explica por que Weyl fez a associação do *princípio da identidade dos indiscerníveis* com a *simetria*, dando ao referido princípio o status de suporte metafísico do conceito. Lembro que o *princípio da identidade dos indiscerníveis* de Leibniz afirma que uma coisa só pode ser igual a ela mesma, ou seja, $a=a$, logo $a \neq b$ (LEIBNIZ, 1988, p.168-169). Leibniz, no *princípio da identidade dos indiscerníveis*, também afirma que a diferença entre as coisas não é nem numérica, nem espacial, nem temporal, mas intrínseca, ou seja, a coordenada espacio-temporal de um corpo é insuficiente para distingui-lo de outro (Danowski, 2005, p.108). Por essa razão, penso que o princípio leibniziano em questão não cumpre o papel enunciado pelo matemático por sua própria definição, pois ser *simétrico* não é exatamente ser *igual*. Portanto, creio que o *princípio da identidade dos indiscerníveis* não seria o melhor candidato a suporte metafísico do conceito de *simetria*, nem em seu significado antigo, nem no moderno. Em linhas gerais, o *princípio* *da identidade dos indiscerníveis*, defendido por Weyl como suporte filosófico do conceito moderno de *simetria*, trata da multiplicidade e individualidade dos existentes, mas não num sentido harmônico ou harmonioso. Contudo, é no *princípio da harmonia preestabelecida* que se nota a semelhança apontada por Weyl, não só no que tange a imagem, mas também quanto à funcionalidade: parece estar nele a verdadeira relação entre coisas simétricas. *Grosso modo*, seria a *harmonia* preestabelecida no universo e não a discernibilidade das coisas por ele compostas que permite falar do mundo, ou do universo, do modo que se fala, ou seja, parafraseando Rutherford, em termos de multirepresentatividade e inter-representatividade (RUTHERFORD, 1998, p.225-226). A discernibilidade trataria de um dos aspectos do todo harmônico e harmonizado. Inicialmente, recordo que, para Leibniz, é na *harmonia* que há entre as coisas, não necessariamente perfeitas, que se dá o melhor. Em vista disso, o rosto mais belo não é aquele que tem as mais belas partes em sua composição: a beleza está na combinação dessas partes, ou seja, na *simetria* que há entre elas. Consequentemente, a *simetria* deverá sempre remeter a uma *harmonia* para revelar a beleza. Só isto deveria bastar para justificar a *harmonia* como suporte metafísico da *simetria*, pois, segundo Leibniz, ao criar o mundo, Deus escolheu os melhores componentes possíveis baseado no critério da harmonização e não na qualidade individual dos mesmos. Sendo assim, ao olhar cuidadosamente as *equações da beleza* de Leibniz, apresentadas anteriormente, é possível mostrar que a o *princípio da harmonia preestabelecida*, e não o *princípio da identidade dos indiscerníveis*, seria o verdadeiro suporte metafísico da *simetria*, visto que essas equações preenchem dois requisitos básicos da *simetria*: forma e funcionalidade.

Retomando a discussão da *Parte I*, no *Essay de Dynamique*, Leibniz definiu três equações visando substituir as sete regras de Descartes e as chamou de *equações da beleza*. Lembro que: a) as sete regras cartesianas estavam física e metafisicamente incorretas, menos a primeira e b) as equações leibnizianas que corrigiam o erro cartesiano foram:

1) Equação Linear: $v - y = z - x$

2) Equação Plana: $av + by = ax + bz$

3) Equação Sólida: $avv + byy = axx + bzz$

Para fins operacionais, reescreverei estas equações numa notação mais adequada aos meus propósitos[4]:

1) Equação Linear: $v_{i1} - v_{i2} = v_{f2} - v_{f1}$

2) Equação Plana: $m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = m_1v_{f1} + m_2v_{f2}$

3) Equação Sólida: $m_1v^2_{i1} + m_2v^2_{i2} = m_1v^2_{f1} + m_2v^2_{f2}$

Outrossim, foi dito que a partir de duas das três equações apresentadas seria possível chegar à terceira:

1) $v_{i1} - v_{i2} = v_{f2} - v_{f1} \Rightarrow v_{i1} + v_{f1} = v_{f2} + v_{i2}$

2) $m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = m_1v_{f1} + m_2v_{f2} \Rightarrow m_1v_{i1} - m_1v_{f1} = m_2v_{f2} - m_2v_{i2} \Rightarrow m_1(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{f2} - v_{i2})$

3) $m_1v^2_{i1} + m_2v^2_{i2} = m_1v^2_{f1} + m_2v^2_{f2} \Rightarrow m_1v^2_{i1} - m_1v^2_{f1} = m_2v^2_{f2} - m_2v^2_{i2} \Rightarrow m_1(v^2_{i1} - v^2_{f1}) = m_2(v^2_{f2} - v^2_{i2})$

Logo, tomar as equações abaixo duas a duas significa encontrar sempre a terceira:

1) $v_{i1} + v_{f1} = v_{f2} + v_{i2}$ (a)

2) $m_1(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{f2} - v_{i2})$ (b)

3) $m_1(v^2_{i1} - v^2_{f1}) = m_2(v^2_{f2} - v^2_{i2})$ (c)

*(a) * (b) = (c)*

*(c) / (b) = (a)*

*(c) / (a) = (b)*

Em geral, um objeto matemático, por exemplo, uma equação, contém uma simetria intrínseca, na sua própria *definição. Por quê? Porque há uma harmonia* nas combinações e proporções de seus termos, ou seja, eles se apresentam sempre de forma regular. Assim, pode-se dizer também das equações do movimento de Leibniz que elas são simétricas e devem fornecer sempre um resultado inteiro, indivisível. Este seria mais um motivo para se eleger o *princípio da harmonia preestabelecida* como pressuposto metafísico do conceito de *simetria* moderna, em vez do *princípio da*

[4] Para indicar as grandezas iniciais e finais, uso a notação "i" e "f", respectivamente.

*identidade dos indiscerníveis*, como propôs Weyl. Essa *simetria*, tão forte nos escritos físico-matemáticos de Leibniz, deve ter inspirado o comentador Fichant a afirmar que na Filosofia de Leibniz, no que tange espaço, tempo e movimento, a *harmonia* apareceria como a composição do absoluto com o relativo (FICHANT, 1998, p.285). Igualmente, corroboro esta idéia e discordo de Gueroult quando este afirmou que a idéia da quantidade de progresso seria muito difícil de conceber sem a noção de espaço absoluto (GUEROULT, 1967, p.54). No que tange a *simetria* leibniziana, os predicados espaciais, absoluto ou relativo, pragmaticamente, teriam a mesma eficácia. No sistema de forças de Leibniz, as forças, morta e viva, em mútua e contínua transformação sugerem uma independência espacial. Se assim o for, tanto faz considerar uma concepção absoluta ou relativa do espaço, visto que a *simetria de translação* associada à *forma moderada da teoria leibniziana do vácuo*, que reconhece a possibilidade de lugares sem matéria na ideia de Leibniz, garante essa afirmação (KHAMARA, 1993, p.473). Na *simetria de translação*, o corpo transladado apresenta uma espécie de resistência às alterações, ou seja, ao longo de uma linha reta e a cada deslocamento, o corpo que se desloca deverá permanecer sempre o mesmo, independentemente do tempo decorrido. Tomo como exemplo um elevador. *Grosso modo*, de acordo com as físicas leibniziana e newtoniana, o movimento significa uma mudança de lugar no decorrer do tempo, sendo que estes espaço e tempo são relativos e absolutos, respectivamente. Parece mais simples compreender a *simetria de translação* num espaço absoluto, visto que todos os pontos neste espaço são iguais, o que implica lugares iguais. Mas, e no espaço relativo? Na *simetria de translação* existe algo observável que se conserva: no caso específico do elevador, sua forma e direção são conservadas, isto é, a cada posição instantânea da reta que o elevador percorre ao subir ou descer, sua forma permanece inalterada. Assim, o que há de simétrico nesse exemplo, além da conservação da forma física do elevador, é a relatividade espacial do movimento que sempre se dá na mesma direção. A seu turno, a invariância encontrar-se-ia em permitir a conjugação do relativo com o absoluto. Deste modo, a forma primitiva do movimento do elevador se manterá inalterada durante a translação se e somente se não houver qualquer ação externa. Em outras palavras, ao longo da reta percorrida pelo elevador, a direção do movimento é rigorosamente a mesma, absoluta, o que equivale a dizer que a reta é homogênea. Apesar disso, não creio ser correto atribuir a um espaço, conforme definido por Leibniz, o atributo homogêneo ou heterogêneo: o espaço definido como *uma ordem de* *coexistência das coisas* excluiria estes atributos. Se essas razões não fossem suficientes para provar minha hipótese sobre os fundamentos do conceito de *simetria*, haveria ainda a questão da forma moderada da teoria do vácuo de Leibniz. Esta forma moderada de interpretar a teoria leibniziana do vácuo sustenta a existência de lugares sem matéria no espaço relativo de Leibniz, desde que tomadas definições distintas de espaço e lugar. Portanto, se o elevador do exemplo supramencionado se move ao longo de pontos representáveis por pares ordenado do tipo $(a_n,b_m)$ e, se estes pares ordenados são coordenadas espacio-temporais determináveis *a priori*, ou seja, sem a presença do próprio elevador, poder-se-ia supor que os lugares $(a_n,b_m)$ pelos quais o elevador deslizou eram todos iguais e, consequentemente, se daria mais uma vez a invariância do movimento de translação.

**Referências Bibliográficas:**

**Fontes Primárias**


LEIBNIZ, G. W. *Escritos de dinámica*. Madri: Editorial Technos S.A. 1991.

______. *Naissance du calcul différentiel*: 26 articles des Acta eruditorum. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 1995.

______. *Principes de la nature et de la grâce fondés en raison-Principes de la philosophie ou monadologie*. Paris: Presses Universitaires de France, 2001.


**Edições Especiais**


ABRIL CULTURAL (org.) *Os Pensadores*: Sir Isaac Newton – G. W. Leibniz. São Paulo: abril Cultural, 1974.

GERHARDT, C. I. (GP) (org.) *G.W. Leibniz Die Philosophischen Schriften*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1978.

______. (GM) (org.) *G.W. Leibniz Die Mathematische Schriften*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

NOVA CULTURAL (org.) *Os Pensadores*: Leibniz I. São Paulo: nova Cultural, 1988.


**Fontes Secundárias**

COSTABEL, P. *Leibniz and dynamics*: the texts of 1692 (Essay de Dynamique). Paris: Hermann, 1973.

DANOWSKI, D. Leibniz e as voltas do tempo In: MOREIRA, V. C. (org.) *Doispontos*: Leibniz. Revista do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Paraná e da Universidade Federal de São Carlos, v.2, n.1, semestral, out 2005, p.101-121.

FICHANT, *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz*. Paris: Presses Universitaires de France, 1998.

GUÉROULT, M. *Leibniz Dynamique et Metaphysique*. Paris: Editions Aubier-Montaigne, 1967.

KHAMARA, E. Leibniz's theory of space: a reconstruction. In: *The Philosophical Quaterly*, v. 43, n. 173, 1993, p.472-488.

KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. *Mechanics: Berkeley physics course – volume 1*, Nova York: Mcgraw-Hill Book Company, 1965.

MOREAU, J. *L'Univers Leibnizien*. Paris: Emmanuel Vitte, 1956.

RUTHERFORD, *Leibniz and the rational order of nature.* Melbourne: Cambridge University Press, 1998.

SERRES, M. *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France, 2001.

WEYL, H. *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press.